三角形の正射影

空間内に $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B，C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B′，C′ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ を示せ。

(2) $\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) P 上の三角形 AB′C′ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。

＜ ’19 名古屋大 ＞

【戦略 1】

(1) **パッと見よく分からない条件ですから，やってみるしかないでしょう。**

計算の指針はベクトル計算の基本「始点を揃える」というセオリーに従って計算します。

至る所に存在する直交するベクトル達に気をつけながら変形していきます。

ただし，最後の部分は 0 を目指すことから 平面 P 上にある $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ と直交するベクトル $\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C'C}}$ に目を付けて変形します。

(2) **ベクトルの話を受けた流れですから，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}<0$ を目指す流れに行きたいところです。**

その際 (1) に $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ がいますから，移項してやると一発 KO です。

(3) **(2) の活用を考えると，$\angle\mathrm{B'AC'}$ が鈍角，すなわち $\triangle\mathrm{AB'C'}$ の最大角が $\angle\mathrm{B'AC'}$ と特定できていることになり，それはすなわち最大辺が B′C′ であることを意味します。**

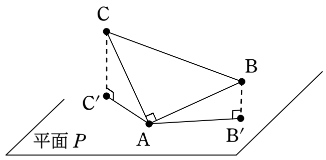
与えられた条件を考えると，$\mathrm{B'C'}=7$ ということになりますから，$|\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}|^2=49$ すなわち，$|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=49$ となります。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ は 4，$\sqrt{21}$ のどちらかに対応しますが，どちらでも同じ事で結局は $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-6$ を得ることになり，(1) から，$|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}||\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|=6$ となります。

あとは三平方の定理で片が付く見通しが立つでしょう。

【解 1】

(1)
$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}})\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\,(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\,(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC'}}\\
&=0+0\\
&=0
\end{aligned}
$$



よって，題意は示された。

(2) $\angle\mathrm{B'AC'}=\theta$（$0\leqq\theta\leqq\pi$）とすると，

$$\theta>\frac{\pi}{2}\iff\cos\theta<0\iff\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|}<0\iff\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}<0$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}<0$ を示せばよい。

(1) より，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}&=-\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}\\
&=-|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|\cos 0\quad(\because\ \overrightarrow{\mathrm{B'B}},\ \overrightarrow{\mathrm{C'C}}\ \text{のなす角は}\ 0)\\
&=-|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|\\
&<0
\end{aligned}
$$

であり，題意は示された。

(3) $\angle\mathrm{B'AC'}>\dfrac{\pi}{2}$ より，$\triangle\mathrm{AB'C'}$ において，辺 B′C′ が最大辺なので条件から，$\mathrm{B'C'}=7$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}|^2=49$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|^2=49$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=49$

$(|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|)=(4,\ \sqrt{21}),\ (\sqrt{21},\ 4)$ いずれの場合でも

$16+21-2\,\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=49$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-6$ を得る。

一方，(1) より，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=-|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|=6\ \cdots\ ①$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とおく。

三平方の定理から，

$(|\overrightarrow{\mathrm{B'B}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{C'C}}|)=(\sqrt{x^2-16},\ \sqrt{x^2-21}),\ (\sqrt{x^2-21},\ \sqrt{x^2-16})$

（このことから $x^2>21$ を満たしている。…②）

① にこれらを代入すると，いずれの場合でも

$\sqrt{x^2-16}\,\sqrt{x^2-21}=6$，すなわち $(x^2-16)(x^2-21)=36$ を得る

展開すると $x^4-37x^2+300=0$ となり，$(x^2-25)(x^2-12)=0$

② より，$x^2=25$ であり，$x>0$ であるから，$x=5$

ゆえに，$\mathrm{AB}=5$ …答

【戦略 2】(1) について

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ ということから $(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'C}})=0$

と見て展開すれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$$

を得ます。

平面 P と $\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C'C}}$ は直交しているので，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=0$ ということになり，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ を得ます。

【解 2】(1) について

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，$(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'C}})=0$

これを展開すれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$$

を得ます。

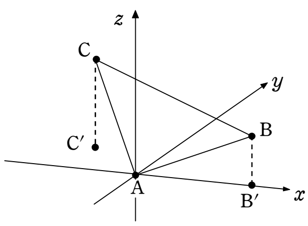
平面 P と $\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C'C}}$ は直交しているので，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=0$ が成立する。

【戦略 3】座標路線で考える。

空間座標を設定して考えてみます。

なるべく簡単になるように設定したいので



$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B'}(a,\ 0,\ 0)$ $(a>0)$，$\mathrm{C'}(b,\ c,\ 0)$ $(c\geqq 0)$ と設定します。

B，C はそれぞれ B′，C′ の真上にあることから，

$\mathrm{B}(a,\ 0,\ \alpha)$，$\mathrm{C}(b,\ c,\ \beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$ と設定します。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}a\\0\\\alpha\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}b\\c\\\beta\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{B'B}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\begin{pmatrix}0\\0\\\beta\end{pmatrix}$

ということから，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=ab+\alpha\beta$

翻訳しきっていないのは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形ということであり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に注目すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=ab+\alpha\beta$ ですから

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となっていきます。

(2) (1) の議論から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=ab+\alpha\beta=0$ で，この文字たちの中で唯一条件を持っていない b に注目し，$b=-\dfrac{\alpha\beta}{a}$ と整理します。

条件から $a>0$，$\alpha>0$，$\beta>0$ であるため，$b<0$ となります。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=ab<0$ となり，解決です。

(3) 鈍角の対辺である B′C′ が最大辺であるとするところは【解 1】と同様です。

残る 2 辺 AB′，AC′ が 4，$\sqrt{21}$ のどちらに対応するかですが B，C についての対等性から，$\mathrm{AB'}=4$，$\mathrm{AC'}=\sqrt{21}$ で考えても一般性を失いません。

すると，$a=4$ として，$\mathrm{B'}(4,\ 0,\ 0)$ $\mathrm{C'}(b,\ c,\ 0)$ として考えることになります。

よって $\mathrm{AC'}=\sqrt{21}$，$\mathrm{B'C'}=7$ より，$\begin{cases}b^2+c^2=21\\(b-4)^2+c^2=49\end{cases}$ を得ます。

ここから $b=-\dfrac{3}{2}$，$c=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ となり，$\mathrm{C'}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ と C′ の座標が求まります。

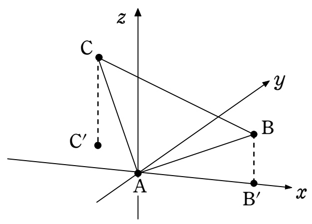
よって，$\mathrm{B}(4,\ 0,\ \alpha)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{2},\ \beta\right)$ となります。

あとは，$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形であることを翻訳し α，β を特定しにいくという路線で考えていきます。

【解 3】

$A(0,0,0)$，$B'(a,0,0)$ $(a>0)$，$C'(b,c,0)$ $(c\geqq 0)$
$B(a,0,\alpha)$，$C(b,c,\beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

と設定する。



(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}a\\0\\\alpha\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}b\\c\\\beta\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{AB'}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{AC'}=\begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}=\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}=\begin{pmatrix}0\\0\\\beta\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}=ab+\alpha\beta$

一方，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=ab+\alpha\beta$ であり，条件から $AB\perp AC$ であるため
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

以上から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{C'C}&=ab+\alpha\beta\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=0\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) (1) の議論から $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=ab+\alpha\beta=0$ で，$a>0$ より，$b=-\dfrac{\alpha\beta}{a}$

条件から $a>0$，$\alpha>0$，$\beta>0$ であるため，$b<0$ となる。

したがって，$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}=ab<0$ となり，$\angle B'AC'>\dfrac{\pi}{2}$ である。

(3) $\angle B'AC'>\dfrac{\pi}{2}$ より，$\triangle AB'C'$ の最大辺は $B'C'$ である。

これより，$B'C'=7$

B'，C' の対等性から，$AB'=4$，$AC'=\sqrt{21}$ として考えても
一般性を失わない。

ゆえに，$a=4$ として，$B'(4,0,0)$ $C'(b,c,0)$ として考える。

$AC'=\sqrt{21}$，$B'C'=7$ より，$\begin{cases}b^2+c^2=21 & \cdots ①\\(b-4)^2+c^2=49 & \cdots ②\end{cases}$

② より，$b^2-8b+16+c^2=49$

① を代入して，$21-8b+16=49$ で，$b=-\dfrac{3}{2}$ を得る。

このとき，① より $\dfrac{9}{4}+c^2=21$ で，$c\geqq 0$ を考えると $c=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

これより，$B(4,0,\alpha)$，$C\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2},\beta\right)$

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の直角二等辺三角形という条件から

$$AB=AC \text{ かつ } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$AB=AC$ より，$16+\alpha^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{75}{4}+\beta^2$ で，$\alpha^2-\beta^2=5$ …③

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より，$4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+0\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2}+\alpha\beta=0$

すなわち $\alpha\beta=6$ …④ を得る。

$\alpha>0$ であるため，④ より $\beta=\dfrac{6}{\alpha}$ であり，これを ③ に代入すると

$\alpha^2-\dfrac{36}{\alpha^2}=5$ で，これを整理すると $\alpha^4-5\alpha^2-36=0$

これは $(\alpha^2-9)(\alpha^2+4)=0$ と変形できるため，$\alpha>0$ を考えると $\alpha=3$

このとき ④ より，$\beta=2$

以上から，$B(4,0,3)$ を得るため，$AB=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5$ …答

【総括】

直角二等辺三角形を平面 P に正射影した三角形に関する考察でした。

ベクトル路線で行くか，座標でゴリ押すかという 2 路線ありますが，ちょこちょこ幾何的なモノの見方も必要だったと思います。
（例えば最大辺に関する考察の部分など）

段階的な誘導設問があったため，その誘導を活かしきれば完答するのに無理はないはずです。

個人的には，誘導がなければ座標設定でゴリ押す路線なのかなと感じました。