関数 $f(x)=\dfrac{1}{(\cos x+1)(\sin x+1)}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における関数 $f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ。ただし，変曲点は求めなくてよい。

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ および，x 軸，y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ。

＜ ’04 山口大 ＞

【戦略】

(1) **落ち着いて商の微分法により $f'(x)$ を計算すれば**

$$f'(x)=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+1)}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$

まで行き着きます。

$f'(x)$ の符号を支配しているのは $\sin x-\cos x$ の部分です。

合成して $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ と見て，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 \ \cdots\ 0<x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{4} \iff \frac{\pi}{4}<x\leqq\frac{\pi}{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \ \cdots\ x-\frac{\pi}{4}=0 \iff x=\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0 \ \cdots\ -\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}<0 \iff 0\leqq x<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

と符号を判断してもよいですが，ここでは勉強のために

$y=\sin x$，$y=\cos x$ のグラフの上下で符号を判断するという考え方で処理します。

(2) **$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ という関係式から分かるように**

$\cos$ の方が $\tan$ との親和性が高いですから，$\cos x$ から導出します。

角度 $\dfrac{x}{2}$ を登場させようという気持ちで

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1$$

と見れば解決です。

$\sin x$ については $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ とし，

$$\sin\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

と見れれば，$\sin x=2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

となり，解決です。

(3) **題意の部分の面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos x)(1+\sin x)}\,dx$ です。**

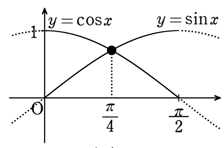
この流れで $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく置換積分を思いつかない方が問題です。

【解答】

(1)
$$f'(x)=\frac{-\{(\cos x+1)(\sin x+1)\}'}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$
$$=\frac{-\{-\sin x(\sin x+1)+\cos x(\cos x+1)\}}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$
$$=\frac{\sin^2x+\sin x-\cos^2x-\cos x}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$
$$=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+(\sin x-\cos x)}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$
$$=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+1)}{(\cos x+1)^2(\sin x+1)^2}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin x+\cos x+1>0$

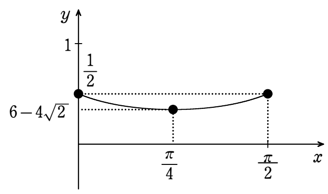
ゆえに，$f'(x)$ の符号は $\sin x-\cos x$ の符号に依存し，(図 1) によるグラフの上下関係に注意しながら $\sin x-\cos x$ の符号を把握して増減表をかくと



(図 1)

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{2}$	↘	$6-4\sqrt{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$

これを図示すると



(2)
$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ に対して，

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\frac{1+t^2}{2}$$

となり，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=\dfrac{2}{1+t^2}$ が成立する。

(3)　求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos x)(1+\sin x)}\,dx$$

ここで，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，

x	$0\ \rightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
t	$0\ \rightarrow$	1

(2) の結果から

$$S=\int_0^1\frac{1}{\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\dfrac{2}{1+t^2}\cdot\dfrac{(t+1)^2}{1+t^2}}\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{(t^2+1)^2}{2(t+1)^2}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{t^2+1}{t^2+2t+1}\,dt$$

$$=\int_0^1\left\{1-\frac{2t}{t^2+2t+1}\right\}dt$$

$$=\int_0^1\left\{1-\frac{2t+2-2}{t^2+2t+1}\right\}dt$$

$$=\int_0^1\left\{1-\frac{2t+2}{t^2+2t+1}+2(t+1)^{-2}\right\}dt$$

$$=\Big[t-\log(t+1)^2-2(t+1)^{-1}\Big]_0^1$$

$$=2(1-\log 2)\ \cdots\ \text{答}$$

【戦略 2】(3) 積分計算の部分的別解

$\displaystyle\int_0^1\frac{t^2+1}{t^2+2t+1}\,dt$ **について**

$\displaystyle\int_0^1\left\{1-\frac{2}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}\right\}dt$ **と部分分数分解してみれば**

$$\Big[t-2\log(1+t)-2(1+t)^{-1}\Big]_0^1=2(1-\log 2)$$

となります。

【総括】

(2) が相当強力なヒントとなっています。

(2) で示した

> $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおいたとき，
>
> $$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$
>
> となる。

という内容は「ワイエルシュトラスの置換」と呼ばれ，様々な場面で活用されます。

ワイエルシュトラスの置換のうま味は，

三角関数の式を有理式（$\dfrac{\text{整式}}{\text{整式}}$）の形にできる

ということであり，特に本問のような三角関数絡みの積分計算で重宝することが多々あります。

＜ワイエルシュトラスの置換の図形的なイメージ（あくまでイメージ）＞

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ なので，$(-1,\ 0)$ を通って，x 軸正の方向と $\dfrac{\theta}{2}$ の角をなす直線の式が $y=t(x+1)$ で与えられます。

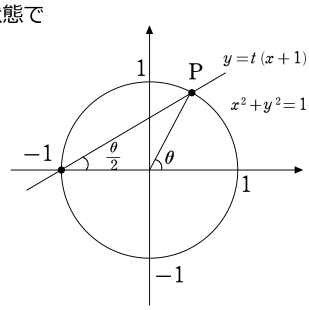
これと $x^2+y^2=1$ を連立すると $x^2+t^2(x+1)^2=1$

整理すれば $(1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$ となります。

$x=-1$ を解にもつことが分かっているので見かけほど難しい因数分解ではありません。

ゆえに，$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$ となり，$(-1,\ 0)$ 以外の交点が $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ と得られます。この交点を P とおきます。

仕上げは円周角の定理により，右の図の状態で



$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せることから

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

ということになります。