実数 x は $-\pi<x<\pi$ の範囲を動くとする。このとき，関数

$$f(x)=\frac{1+\sin x}{3+\cos x}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $t=\tan\frac{x}{2}$ として，等式 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ を示せ。

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

＜ '09 東京都立大 ＞

【戦略】

(1) （**例題と同じであるため省略します。**）

(2) $t=\tan\frac{x}{2}$ **と置き換えることで** $\dfrac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{3+\frac{1+t^2}{1-t^2}}=\dfrac{t^2+2t+1}{2(t^2+2)}$ **という**

分数関数の最大最小問題に帰着します。

この後はセオリー通り仮分数を帯分数に直すことで頭でっかちを直してから微分します。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\cos x&=2\cos^2\frac{x}{2}-1\\&=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1\\&=\frac{2}{1+t^2}-1\\&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\sin x&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\&=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\&=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

(2) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと

$$f(x)=\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{3+\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

$$=\frac{t^2+2t+1}{2(t^2+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2t-1}{t^2+2}\right)$$

$g(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2t-1}{t^2+2}\right)$ とおくと，

$$g'(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(t^2+2)-2t(2t-1)}{(t^2+2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t^2+2t+4}{(t^2+2)^2}$$

$$=\frac{-(t+1)(t-2)}{(t^2+2)^2}$$

x が $-\pi<x<\pi$ の範囲を動くとき，$-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$ より，

$t\left(=\tan\frac{x}{2}\right)$ は全実数を動き得る。

このとき

t	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$

という増減表を得る。

以上から，$f(x)$ の最大値は $\frac{3}{4}$，最小値は 0 … 答

【総括】

ワイエルシュトラスの置換により，

三角関数の分数式 → 多項式の分数式

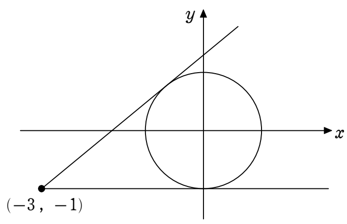
に帰着できました。

−−−−−−−−−−(以下，脇道に逸れた話になります)−−−−−−−−−−

文字の混乱を避けるために，$f(\theta)=\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}$ とします。

$x^2+y^2=1$ 上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ と，定点 $(-3, -1)$ を結ぶ線分の傾きが

$\frac{\sin\theta-(-1)}{\cos\theta-(-3)}$，すなわち $f(\theta)$ です。



接線については $y=m(x+3)-1$，すなわち

$mx-y+3m-1=0$ と設定し，これと $(0, 0)$ との距離が半径 1 となればよいので

$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ で，$(3m-1)^2=m^2+1$

これを整理すると $4m^2-3m=0$ で，$m(4m-3)=0$

これより，$m=0$，$\frac{3}{4}$ を得るため，傾き $f(\theta)$ の最小値は 0，最大値は $\frac{3}{4}$ と得ることもできます。

このように式のもつ図形的意味を見出そうとする姿勢も大切です。