ワイエルシュトラスの置換【方程式への応用】【積分計算への応用】

(1)　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，次の等式が成り立つことを示せ。

(i)　$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，(ii)　$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，(iii)　$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2)　a，b を実数とする。x を未知数とする方程式

$$a\sin x+b\cos x+1=0$$

が，$-\pi<x<\pi$ の範囲に相異なる 2 つの解をもつとする。

(i)　a，b の満たすべき条件を求めよ。

(ii)　2 つの解を α，β とするとき，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を a，b を用いて表せ。

(3)　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x+1}\,dx$$

＜ '13 大阪教育大 ＞

【戦略】

(1)（**例題で扱ったワイエルシュトラスの置換であり，省略します。**）

(2)　(1) **の置換により，** $a\sin x+b\cos x+1=0\cdots(*)$ **は**

$a\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+b\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$，**すなわち**

$$(1-b)t^2+2at+1+b=0\ \cdots(**)$$

という 2 次方程式になります。

$-\pi<x<\pi$ **の範囲では，** $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ **であるため，** $t\left(=\tan\dfrac{x}{2}\right)$ **は全実数をとり得ます。**

さらに， t **の値と** x **の値は 1 対 1 対応するため，** $(*)$ **が** $-\pi<x<\pi$ **の範囲で異なる 2 解をもつための条件は**

$(**)$ **が異なる 2 解をもつ**

という条件になります。

(ii) **については** $(*)$ **の解** α，β **に対して，** $t_1=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$t_2=\tan\dfrac{\beta}{2}$ **という置き換えにより，** t_1，t_2 **が** $(**)$ **の解となることから，**

解と係数の関係により， $\begin{cases}\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}=-\dfrac{2a}{1-b}\\[2mm]\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1+b}{1-b}\end{cases}$ **を得ます。**

あとは， $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **を加法定理でバラすだけですが**

$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cdots\cdots=\dfrac{a}{b}$ **という計算結果を得ます。**

これより， $b=0$ **のときを検証する必要性があることに注意します。**

(3)　**もちろん置換積分です。**

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\cos x&=2\cos^2\frac{x}{2}-1\\&=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1\\&=\frac{2}{1+t^2}-1\\&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\&=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\&=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

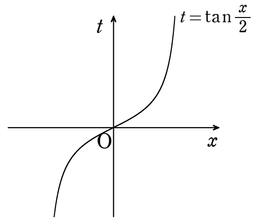
$$\begin{aligned}\tan x&=\frac{\sin x}{\cos x}\\&=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\\&=\frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}$$

(2)　(i)　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$a\sin x+b\cos x+1=0\ \cdots(*)$ は

$a\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+b\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$，すなわち

$$(1-b)t^2+2at+1+b=0\ \cdots(**)$$

と変形できる。



というグラフより，$-\pi<x<\pi$ の範囲で，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ という関係を満たす t と x は 1 対 1 対応し，t は全実数をとり得る。

ゆえに，$-\pi<x<\pi$ の範囲に $(*)$ を満たす相異なる実数 x が 2 個存在するための条件は

$(**)$ を満たす相異なる実数 t が 2 個存在する

ということであり，$b\fallingdotseq 1$ かつ $(**)$ の判別式を D として $\dfrac{D}{4}>0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=a^2-(1-b)(1+b)\\&=a^2+b^2-1\end{aligned}$$

よって，求める a，b の条件は

$b\fallingdotseq 1$ かつ $a^2+b^2>1\ \cdots$ 答

(ii)　(*) の解 α, β に対して，$t_1=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$t_2=\tan\dfrac{\beta}{2}$

という置き換えにより，t_1，t_2 が (**) の解となることから，

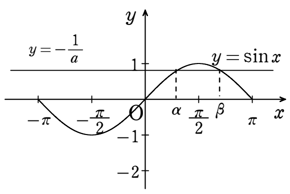
解と係数の関係により，$\begin{cases} \tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}=-\dfrac{2a}{1-b} \\ \tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1+b}{1-b} \end{cases}$ を得る。

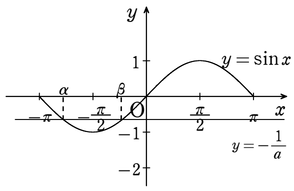
$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$$
$$=\frac{-\frac{2a}{1-b}}{1-\frac{1+b}{1-b}}$$
$$=\frac{a}{b}$$

$b=0$ のとき (*) は $a\sin x+1=0$

これを満たす実数解が 2 個あるための条件は (i) より $a^2>1$

このとき，$\sin x=-\dfrac{1}{a}\cdots$(☆)





(☆) を満たす $x=\alpha$, β は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ を満たしており

$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値は存在しない。

以上から，$\begin{cases} b\fallingdotseq 0 \text{ のとき } \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{b} \\ b=0 \text{ のとき } \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2} \text{ の値は存在しない} \end{cases}$ … 答

(3)　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ に対して，

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$
$$=\frac{1+t^2}{2}$$

となり，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=\dfrac{2}{1+t^2}$ が成立する。

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，

x	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$
t	$0\ \to\ 1$

これより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x+1}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{1}{t+1}\,dt$$
$$=\Big[\log|t+1|\Big]_0^1$$
$$=\log 2\ \cdots \text{答}$$

【総括】

例題の「積分計算への応用」だけでなく，「置き換え 2 次方程式への応用」も含む欲張りな内容です。

文字が絡んだ三角関数の方程式については，真正面からぶつかると面倒くさそうですが，ワイエルシュトラスの置換により，2 次方程式に帰着するというありがたい結果を得ます。