(1) $\tan\dfrac{x}{2}=m$ とするとき，等式

$$\sin x=\frac{2m}{1+m^2}\ ,\ \cos x=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $-\pi<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x+\cos x\geqq\tan\frac{x}{2}$$

＜ ’15 徳島大 ＞

【戦略】

(1) （**例題と同じであるため省略します。**）

(2) $\sin x+\cos x-\tan\dfrac{x}{2}$ **と差を取って考えます。**

(1) **でヒントとして置いてあるであろうワイエルシュトラスの置換を用いると，** $t=\tan\dfrac{x}{2}$ **と置き換えることで**

$\dfrac{2m}{1+m^2}+\dfrac{1-m^2}{1+m^2}-m$ **となります。**

これを整理していくと， $\dfrac{(m+1)^2(1-m)}{m^2+1}$ **となり，**

「$1-m>0$ **であってくれ」**

という気持ちになるでしょう。

$-\pi<x<\dfrac{\pi}{2}$ **ですから，** $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ **なので，** $\tan\dfrac{x}{2}<1$ **となり**

$1-m>0$ **が確定するためハッピーエンドです。**

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}\cos x&=2\cos^2\frac{x}{2}-1\\&=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1\\&=\frac{2}{1+m^2}-1\\&=\frac{1-m^2}{1+m^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\&=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\&=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{2m}{1+m^2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin x+\cos x-\tan\frac{x}{2}&=\frac{2m}{1+m^2}+\frac{1-m^2}{1+m^2}-m\\&=\frac{2m+1-m^2-m(1+m^2)}{1+m^2}\\&=-\frac{m^3+m^2-m-1}{1+m^2}\\&=-\frac{(m-1)(m^2+2m+1)}{1+m^2}\\&=\frac{(m+1)^2(1-m)}{1+m^2}\ \cdots①\end{aligned}$$

今，条件より $-\pi<x<\dfrac{\pi}{2}$ ，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ である。

ゆえに，$\tan\dfrac{x}{2}<1$ であり，$m<1$ を得るため，

① から，$\sin x+\cos x-\tan\dfrac{x}{2}\geqq0$ ，すなわち

$$\sin x+\cos x\geqq\tan\frac{x}{2}$$

であることが示された。

【総括】

ヒントがあればなんてことない問題なのですが，逆にヒントがないと結構苦しいでしょう。

ヒントを付けるかどうかで難易度の温度差が激しくなると思います。

© MathClinic