平面上に同一直線上になり 3 点 O，A，B がある。ただし，∠AOB は直角でないとする。2 点 C，D を以下の条件をみたすように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \fallingdotseq \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \fallingdotseq \overrightarrow{\mathrm{OD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$$

4 つのベクトルを $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{c}$，$\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) n を正の数とする。$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$，$\vec{c} = n\vec{a} + \vec{b}$ のとき，$\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ を n を用いて表せ。

(3) (2) の n が自然数とする。n と $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角の組 $(n,\ \theta)$ を求めよ。

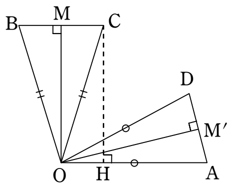
＜ ’18 大阪府立大 ＞

【戦略】

例題と同じであるため，省略します。

【解答】

(1)

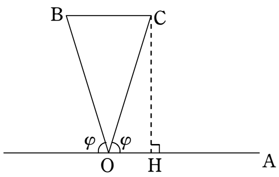


(図 1)

(図 1) のように 線分 BC，AD の中点をそれぞれ M，M′ とし，C から線分 OA に下ろした垂線の足を H とする。

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \vec{b} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{MC}} \\ &= \vec{b} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OH}} \quad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}) \end{aligned}$$

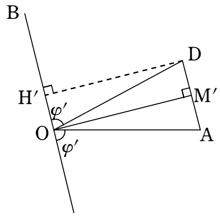
ここで，(図 2) のように φ を定めると



(図 2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \times |\vec{c}|\cos\varphi \\ &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \times |\vec{b}|\cos\varphi \quad (\because\ \text{条件 } |\vec{b}| = |\vec{c}|\,) \\ &= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \\ &= \frac{-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \varphi)}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \\ &= \frac{-(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \end{aligned}$$

よって，$\vec{c} = \vec{b} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$ …答



(図 3)

また，(図 3) のように φ'，H′ を定めると

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \vec{a} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{M'D}} \\ &= \vec{a} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OH'}} \quad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{M'D}} = \overrightarrow{\mathrm{OH'}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH'}} &= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \times |\vec{d}|\cos\varphi' \\ &= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \times |\vec{a}|\cos\varphi' \quad (\because\ \text{条件 } |\vec{a}| = |\vec{d}|) \\ &= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi'}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \\ &= \frac{-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \varphi')}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \\ &= \frac{-(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \end{aligned}$$

よって，$\vec{d} = \vec{a} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$ …答

(2) (1) より $\begin{cases} \vec{c} = \vec{b} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} \\ \vec{d} = \vec{a} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \end{cases}$

$\vec{c} = n\,\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので

$\begin{cases} -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2} = n \quad \cdots ① \\ -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2} = 1 \end{cases}$，すなわち $\begin{cases} |\vec{a}|^2 = -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{n} \\ |\vec{b}|^2 = -2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{cases}$ を得る。

よって，$\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2} = \dfrac{1}{n}$ であり，$\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ …答

(3) (2) より $|\vec{b}|=\sqrt{n}\,|\vec{a}|$ …②

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角は θ $\left(0<\theta<\pi,\ \theta\fallingdotseq\frac{\pi}{2}\right)$ であるので

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

① より $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{n|\vec{a}|^2}{2}$

② も考えると，$\cos\theta=\dfrac{-\dfrac{n|\vec{a}|^2}{2}}{|\vec{a}|\cdot\sqrt{n}\,|\vec{a}|}=-\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ …(*)

$0<\theta<\pi$，$\theta\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2}$ において，$0<|\cos\theta|<1$

これより，$0<\dfrac{\sqrt{n}}{2}<1$ であり，$0<n<4$ を得る。

n は自然数なので，$n=1$，2，3 となり，(*) から次の表を得る。

n	1	2	3
$\cos\theta$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$

求める n の値と，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ の組 $(n,\ \theta)$ は

$$(n,\ \theta)=\left(1,\ \frac{2}{3}\pi\right),\ \left(2,\ \frac{3}{4}\pi\right).\ \left(3,\ \frac{5}{6}\pi\right)\ \cdots \text{答}$$

【総括】

どう考えても例題をパクったとしか思えないぐらい酷似しています。

というか同じ問題です。