平面上に2つのベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を3点O，A，Bが一直線上にないようにとり，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ |\vec{b}|=|\vec{c}|$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ |\vec{d}|=|\vec{a}|$$

ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直でなく，$\mathrm{A} \neq \mathrm{D}$，$\mathrm{B} \neq \mathrm{C}$ とする。

(1) $\vec{c}$，$\vec{d}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

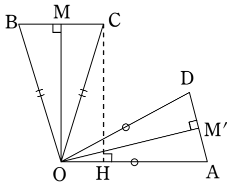
(2) n を正の数として，$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{c}=n\vec{a}+\vec{b}$ のとき，比 $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ の値を求めよ。

(3) (2)の $\vec{d}$ と $\vec{c}$ について，n が自然数のとき，n の値および $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。

＜ '89 新潟大 ＞

【戦略】

(1) **状況を図で把握するために簡単に絵を書いてみると**



のようなイメージです。（二等辺三角形がくっついているイメージ）
ここから $\vec{c}$，$\vec{d}$ を得るために，「正射影ベクトル」に注目します。

例えば，

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\vec{b}+2\,\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=\vec{b}+2\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}\end{aligned}$$

と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が分かれば解決します。
そして，その $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向に正射影したものです。

内積を用いて正射影ベクトルを Get する方法は独特で経験がモノをいいます。

(2) **(1)で得た** $\begin{cases}\vec{c}=\vec{b}-\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\\ \vec{d}=\vec{a}-\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\end{cases}$ **という結果と，**$\vec{c}=n\,\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$

および，$\vec{a}$，$\vec{b}$ **の1次独立性から係数比較をして，**

$\begin{cases}-\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}=n \quad \cdots ①\\ -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}=1\end{cases}$ **を得ることで，手なりに話が進んでいきます。**

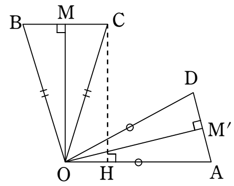
(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$ **のなす角** φ **とすれば** $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ **です。**

(2)の結果 $|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:\sqrt{n}$ **から得る** $|\vec{b}|=\sqrt{n}\,|\vec{a}|$ **と，(2)の導出過程で得る①を変形した** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{n|\vec{a}|^2}{2}$ **を，**$\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

にぶち込むことで，$\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ **というかなり強力な関係式を得ることができ，これにより** n **がほぼ特定されます。**

【解答】

(1)

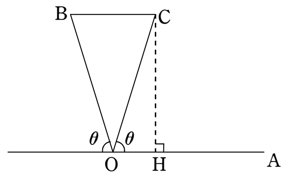


(図1)

(図1)のように線分BC，ADの中点をそれぞれM，M′とし，Cから線分OAに下ろした垂線の足をHとする。

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\vec{b}+2\,\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=\vec{b}+2\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}\ \ (\because\ \overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}})\end{aligned}$$

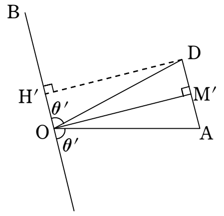
ここで，(図2)のように θ を定めると



(図2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\times|\vec{c}|\cos\theta\\&=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\times|\vec{b}|\cos\theta\ \ (\because\ \text{条件}\ |\vec{b}|=|\vec{c}|)\\&=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\\&=\frac{-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\theta)}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\\&=\frac{-(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\end{aligned}$$

よって，$\vec{c}=\vec{b}-\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ …答



(図 3)

また，(図 3) のように θ'，H′ を定めると

$$
\begin{aligned}
\vec{d} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \vec{a} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{M'D}} \\
&= \vec{a} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OH'}} \quad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{M'D}} = \overrightarrow{\mathrm{OH'}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH'}} &= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \times |\vec{d}|\cos\theta' \\
&= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \times |\vec{a}|\cos\theta' \ (\because \text{条件 } |\vec{a}| = |\vec{d}|) \\
&= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta'}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \\
&= \frac{-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\theta')}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \\
&= \frac{-(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}
\end{aligned}
$$

よって，$\vec{d} = \vec{a} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ …答

(2)　(1) より $\begin{cases} \vec{c} = \vec{b} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \\ \vec{d} = \vec{a} - \dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \end{cases}$

$\vec{c} = n\,\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので

$\begin{cases} -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2} = n \ \cdots ① \\ -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2} = 1 \end{cases}$，すなわち $\begin{cases} |\vec{a}|^2 = -\dfrac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{n} \\ |\vec{b}|^2 = -2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{cases}$ を得る。

よって，$|\vec{a}|^2 : |\vec{b}|^2 = \dfrac{1}{n} : 1 = 1 : n$

以上から $|\vec{a}| : |\vec{b}| = 1 : \sqrt{n}$ …答

(3)　(2) より $|\vec{b}| = \sqrt{n}\,|\vec{a}|$ …②

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を φ $\left(0<\varphi<\pi,\ \varphi \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

① より $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{n|\vec{a}|^2}{2}$

② も考えると，$\cos\varphi = \dfrac{-\dfrac{n|\vec{a}|^2}{2}}{|\vec{a}|\cdot\sqrt{n}\,|\vec{a}|} = -\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ …(∗)

$0<\varphi<\pi$，$\varphi \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}$ において，$0<|\cos\varphi|<1$

これより，$0<\dfrac{\sqrt{n}}{2}<1$ であり，$0<n<4$ を得る。

n は自然数なので，$n=1$，2，3 となり，(∗) から次の表を得る。

n	1	2	3
$\cos\varphi$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
φ	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$

求める n の値と，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 φ の組は

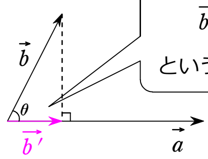
$(n,\ \varphi) = \left(1,\ \dfrac{2}{3}\pi\right), \left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right). \left(3,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ …答

【総括】

正射影ベクトルについて習熟していないと (1) が苦しいでしょう。

<正射影ベクトルについて>

そもそも
$\vec{b'} = \square\,\vec{a}$ と書けるはず
という気持ちをもちましょう



$\vec{b'} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \times |\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}$ 方向の単位ベクトル
（大きさが 1 のベクトル）

影の長さ

$= \dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\,\vec{a}$

分母分子に $|\vec{a}|$ を
かけた

$= \dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$

$= \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$