π が無理数であることの証明

π を円周率とする。次の積分について考える。

$$I_0=\pi\int_0^1 \sin \pi t\ dt\ ,\ \ I_n=\frac{\pi^{n+1}}{n\,!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin \pi t\ dt\ \ (n=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\cdots)$$

(1)　n が自然数であるとき，不等式 $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}<e^x\ (x>0)$ が成立することを数学的帰納法により示せ。これを用いて，不等式

$$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u}\ \ (u>0)$$

が成立することを示せ。

(2)　I_0，I_1 の値を求めよ。また，漸化式

$$I_{n+1}=\frac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}\ (n=1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\cdots)$$

が成立することを示せ。

(3)　π が無理数であることを背理法により証明しよう。π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定する。$A_0=I_0$，$A_n=p^nI_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，…… は正の整数となることを示せ。さらに，これから矛盾を導け。

< ’03 大阪大 >