π を円周率とする。次の積分について考える。

$$I_0=\pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt,\quad I_n=\frac{\pi^{n+1}}{n\,!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式 $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}<e^x\ (x>0)$ が成立することを数学的帰納法により示せ。これを用いて，不等式

$$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots\cdots+u^nI_n<\pi e^{\pi u}\ (u>0)$$

が成立することを示せ。

(2) I_0，I_1 の値を求めよ。また，漸化式

$$I_{n+1}=\frac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成立することを示せ。

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう。π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定する。

$A_0=I_0$，$A_n=p^nI_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，…… は正の整数となることを示せ。さらに，これから矛盾を導け。

＜ '03 大阪大 ＞

【戦略】

(1) $e^x-\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}\right)>0\ (x>0)$ **を示す部分については**

$f_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}$ **とおいたときに** $f'_n(x)=f_{n-1}(x)$ **であることから，言われなくても帰納法で示したいところです。**

後半の内容については，定積分と不等式評価の分野における定番の考え方である「体の一部を定数化」という考え方で

$$I_k=\frac{\pi^{k+1}}{k\,!}\int_0^1 t^k(1-t)^k\sin\pi t\,dt<\frac{\pi^{k+1}}{k\,!}$$

と押さえれば，$u^kI_k<\pi\cdot\dfrac{(\pi u)^k}{k\,!}$ **となり，**$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ **として** $\sum$ **すれば，前半で示した不等式が活用できます。**

(2) **方針としては「部分積分からの積分漸化式の作成」という定番の方針です。**

方針は明確ですが，計算量が多いので，とにかく目に優しくしようという気持ちで，「置き換え」を最大限駆使していきます。

ここでは，$g_n(t)=t^n(1-t)^n$ **と置き，**$J_n=\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt$ **と置き**

最終的に $I_n=\dfrac{\pi^{n+1}}{n\,!}J_n$ **として考えます。**

こうしてみると J_n **についての漸化式を作れば事足りることが分かります。**

(3) **(2) で得た漸化式は** A_n **に関する漸化式に繋がります。**
これにより，A_n **は整数であり，さらに** $I_n>0$ **であることから**
A_n **は正の整数ということが示されます。**

(1) で示した不等式は $A_0+A_1+\cdots+A_n<\pi e^{\pi p}$ **ですが**
正の整数を加え続けていってもそれが有限確定値未満となることはおかしいということになり，矛盾します。

【解答】

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$f_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}\ (x>0)$

とおく。

$F_n(x)=e^x-f_n(x)$ とおき，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$F_n(x)>0\ \ (x>0)\ \cdots(*)$$

が成立することを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$F_1(x)=e^x-(1+x)$ であり，$F'_1(x)=e^x-1>0$ ($\because\ x>0$)

$x>0$ の範囲で $F_1(x)$ は単調増加であり，$F_1(x)>F_1(0)=0$
となり，$(*)$ は成立する。

(ii) $n=k$ ($k=1,\ 2,\ \cdots$) のとき $F_k(x)>0\ (x>0)$ と仮定する。

$$F_{k+1}(x)=e^x-f_{k+1}(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k\,!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

であり，
$$\begin{aligned}F'_{k+1}(x)&=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x^k}{k\,!}\right)\\&=e^x-f_k(x)\\&=F_k(x)\\&>0\end{aligned}$$

$x>0$ の範囲で $F_{k+1}(x)$ は単調増加で $F_{k+1}(x)>F_{k+1}(0)=0$
となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

(i)，(ii) より，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して $F_n(x)>0\ (x>0)$，すなわち

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}<e^x\ (x>0)$$

が成立する。

ここで，積分区間 $0\leqq t\leqq 1$ に対して $0\leqq t^k(1-t)^k\leqq 1$，$0\leqq\sin\pi t\leqq 1$

等号は常には成立しないので

$$0<\frac{\pi^{k+1}}{k\,!}\int_0^1 t^k(1-t)^k\sin\pi t\,dt<\frac{\pi^{k+1}}{k\,!}\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

すなわち $0<I_k<\dfrac{\pi^{k+1}}{k\,!}$

辺々 u^k (>0) をかけると，$0<u^kI_k<\pi\cdot\dfrac{(\pi u)^k}{k\,!}$

ゆえに，
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u^kI_k&<\pi\sum_{k=0}^n\frac{(\pi u)^k}{k\,!}\\&=\pi\left(1+\frac{\pi u}{1!}+\frac{(\pi u)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\pi u)^n}{n\,!}\right)\\&<\pi\cdot e^{\pi u}\end{aligned}$$

以上から，$I_0+uI_1+u^2I_2+\cdots\cdots+u^nI_n<\pi u^{\pi u}$

(2) $I_0=\pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt=\pi\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1=2$ …答

$$
\begin{aligned}
I_1&=\frac{\pi^2}{1!}\int_0^1 t(1-t)\sin\pi t\,dt\\
&=\pi^2\int_0^1 t(1-t)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)'dt\\
&=\pi^2\left\{\left[-\frac{1}{\pi}t(1-t)\cos\pi t\right]_0^1-\int_0^1(1-2t)\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)dt\right\}\\
&=\pi^2\left\{0+\frac{1}{\pi}\int_0^1(1-2t)\cos\pi t\,dt\right\}\\
&=\pi\int_0^1(1-2t)\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right)'dt\\
&=\pi\left\{\left[\frac{1}{\pi}(1-2t)\sin\pi t\right]_0^1-\int_0^1(-2)\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi t\,dt\right\}\\
&=\pi\left\{0+\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\pi t\,dt\right\}\\
&=2\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1\\
&=\frac{4}{\pi}\ \cdots\text{答}
\end{aligned}
$$

ここで，$g_n(t)=t^n(1-t)^n$ とおく。

$g_{n+1}(t)=t^{n+1}(1-t)^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
g'_{n+1}(t)&=(n+1)t^n(1-t)^{n+1}-t^{n+1}\cdot(n+1)(1-t)^n\\
&=(n+1)\{t^n(1-t)^{n+1}-t^{n+1}(1-t)^n\}
\end{aligned}
$$

$g''_{n+1}(t)$

$=(n+1)\{\,nt^{n-1}(1-t)^{n+1}-t^n(n+1)(1-t)(1-t)^n\ -(n+1)t^n(1-t)^n\ +t^{n+1}n(1-t)^{n-1}\,\}$

$=(n+1)\{\,nt^{n-1}(1-t)^{n-1}\{(1-t)^2+t^2\}-(2n+2)t^n(1-t)^n\,\}$

$=(n+1)\{\,nt^{n-1}(1-t)^{n-1}\{1-2t(1-t)\}-(2n+2)t^n(1-t)^n\,\}$

$=(n+1)\{\,n\,g_{n-1}(t)\{1-2t(1-t)\}-(2n+2)g_n(t)\,\}$

$=(n+1)\{ng_{n-1}(t)-2ng_n(t)-(2n+2)g_n(t)\}$

$=(n+1)\{\,-(4n+2)g_n(t)+n\,g_{n-1}(t)\,\}$

以下では，$g_{n+1}(1)=0$，$g_{n+1}(0)=0$，$g'_{n+1}(1)=0$，$g'_{n+1}(0)=0$ に注意する。

$J_n=\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt$ とおく。

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}&=\int_0^1 g_{n+1}(t)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)'dt\\
&=\left[-\frac{1}{\pi}g_{n+1}(t)\cos\pi t\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 g'_{n+1}(t)\cos\pi t\,dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 g'_{n+1}(t)\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right)'dt\\
&=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{\pi}g'_{n+1}(t)\sin\pi t\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt\right\}\\
&=-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\{\ (n+1)\{\,-(4n+2)g_n(t)+n\,g_{n-1}(t)\,\}\sin\pi t\,dt\ \}\\
&=\frac{(n+1)(4n+2)}{\pi^2}J_n-\frac{n(n+1)}{\pi^2}J_{n-1}
\end{aligned}
$$

$I_n=\frac{\pi^{n+1}}{n!}J_n$ であり

$$
\begin{aligned}
I_{n+1}&=\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}J_{n+1}\\
&=\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\left\{\frac{(n+1)(4n+2)}{\pi^2}J_n-\frac{n(n+1)}{\pi^2}J_{n-1}\right\}\\
&=\frac{(4n+2)}{\pi}\cdot\frac{\pi^{n+1}}{n!}J_n-\frac{\pi^n}{(n-1)!}J_{n-1}\\
&=\frac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}
\end{aligned}
$$

となり，示された。

(3) π が有理数であると仮定する。

このとき，$\pi=\frac{p}{q}$（p，q は正の整数）と表せる。

$$
\begin{aligned}
p^{n+1}I_{n+1}&=p^{n+1}\left\{\frac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}\right\}\\
&=p\cdot\frac{4n+2}{\pi}p^nI_n-p^2\cdot p^{n-1}I_{n-1}
\end{aligned}
$$

よって，$A_{n+1}=p\cdot\frac{4n+2}{\pi}A_n-p^2A_{n-1}$

仮定より，$A_{n+1}=p\cdot\frac{4n+2}{\frac{p}{q}}A_n-p^2A_{n-1}$

$$=q(4n+2)A_n-p^2A_{n-1}\ \cdots(*)$$

ここで，$A_0=I_0=2$，$A_1=pI_1=p\cdot\frac{4}{\pi}=p\cdot\frac{4}{\frac{p}{q}}=4q$

A_0，A_1 は整数であり，$(*)$ から帰納的に $A_n\ (n=0,1,\cdots)$ は整数である。

さらに，$I_n>0$ であるため，$A_n=p^nI_n>0$ であることに注意すると，A_n は正の整数である。

一方，(1) で示した不等式は

$$A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n<\pi e^{p\pi}\ \cdots(**)$$

ということであり，これが任意の自然数 n に対して成立する。

A_n は正の整数であることから，$\lim_{n\to\infty}(A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n)=\infty$ ということになるが，$(**)$ が意味するのは

$$\lim_{n\to\infty}(A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n)<\text{(有限確定値)}$$

ということであり，矛盾する。

以上から，π は無理数である。

【総括】

誘導のおかげで，やること自体は明確であったと思います。

ただし，(2) の漸化式の作成は非常に重たい処理です。

少しでも目に優しくする工夫をしたいところです。

その工夫は自分のためだけでなく，読んでもらう採点者のためでもあります。

この重い計算の果てに「π が無理数であることが証明できる」という意味のある結果が待っていたことで，やった甲斐があったと思えますね。