tan の逆関数【復習用問題３】

実数 x に対して $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ とおく。

(1) $f(1)$ を求めよ。

(2) $x>0$ のとき，$g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく。$g(x)$ の導関数を求め，$x>0$ に対して等式 $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) (2) を利用して極限 $\alpha=\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。

(4) 極限 $\lim_{x\to\infty} x(\alpha-f(x))$ を求めよ。

＜ '09 名古屋工業大 ＞

【戦略】

(1)，(2) **は例題や【復習用問題 2】と同じであるため省略します。**

(3) **例題の【参考】で解説していますが，**

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-f\left(\frac{1}{x}\right)$$

と見れば，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\pi}{2}-f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}$ **となります。**

(4) **このあたりのモノの見方は経験値によるところが大きいのですが**

$\dfrac{\alpha-f(x)}{\frac{1}{x}}$ **と分数の形に見ることで，「微分係数の定義」によって**

仕留めることを想定します。

そうなると引数を揃えるために $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ **という関係式を用いて**

$\dfrac{\alpha-g\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ **と見たくなります。**

今度は $\frac{1}{x}$ **の塊を** u **とでもおけば，**$\dfrac{\alpha-g(u)}{u}$ **となり，**(2) **の結果から**

$\dfrac{f(u)}{u}$ **とシンプルになります。**

上述のように，微分係数の定義によるオチを想定していれば

$\dfrac{f(u)-f(0)}{u-0}$ **という形で見ることも自然にできるはずです。**

【解答】

(1) $f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ であり，$t=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくことで

$$f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdots 答$$

(2) $g'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}\cdots 答$$

また，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\cdots$ ①

これより，$h(x)=f(x)+g(x)$ とおくと

$$h'(x)=f'(x)+g'(x)$$
$$=0$$

つまり，$h(x)$ は定数関数であり，$h(x)=C$（C は定数）とおける。

(1) より，$f(1)=\frac{\pi}{4}$ で，$h(1)=f(1)+f\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{2}$ より，$C=\frac{\pi}{2}$

したがって，$h(x)=\frac{\pi}{2}$ (定数関数)

以上から，$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$ (定数関数) ということになり，

題意は示された。

(3) $f(0)=\int_0^0 \frac{1}{1+t^2}dt=0$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-g(x)$$
$$=\frac{\pi}{2}-f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ゆえに，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\pi}{2}-f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}-f(0)=\frac{\pi}{2}$

これより，$\alpha=\frac{\pi}{2}\cdots 答$

(4)　$u=\dfrac{1}{x}$ $(u>0)$ とおくと，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ なので，$g(u)=f\left(\dfrac{1}{u}\right)=f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\,(\alpha-f(x)) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha-f(x)}{\dfrac{1}{x}}\\ &= \lim_{u\to+0}\frac{\dfrac{\pi}{2}-g(u)}{u}\\ &= \lim_{u\to+0}\frac{f(u)}{u} \quad \text{（(2)の結果より）}\\ &= \lim_{u\to+0}\frac{f(u)-f(0)}{u-0} \quad \text{（}f(0)=0\text{ より）}\\ &= f'(0)\end{aligned}$$

① より，$f'(0)=1$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\,(\alpha-f(x))=1$ … 答

【総括】

例題，【復習用問題 1】，【復習用問題 2】をベースとして，最後のオチを追加した仕上げの問題といった感じでしょうか。

元ネタが元ネタですから，色々奥が深く，様々な角度から切り込まれることもあるでしょう。

少なくともベースとなるシナリオは勉強になると思いますから，やりこむ価値はあると思います。