関数 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ を求めよ。

(2) $x>0$ のとき，$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ が定数であることを示し，その値を求めよ。

(3) $\int_0^1 xf(x)\,dx$ の値を求めよ。

＜ ’03 宇都宮大 ＞

【戦略】

【復習用問題 1】の問題とほぼ同じ問題ですので省略します。

【解答】

(1) $f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ であり，$t=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくことで

$$
\begin{aligned}
f(1)&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta \\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&=\frac{\pi}{4} \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

(2) $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく。

$$
f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\ ,\quad
\begin{aligned}
g'(x)&=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' \\
&=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&=-\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

これより，$h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\ (=f(x)+g(x))$ とおくと

$$
\begin{aligned}
h'(x)&=f'(x)+g'(x) \\
&=0
\end{aligned}
$$

つまり，$h(x)$ は定数関数であり，$h(x)=C$（C は定数）とおける。

(1) より，$f(1)=\frac{\pi}{4}$ で，$h(1)=f(1)+f\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{2}$ より，$C=\frac{\pi}{2}$

したがって，$h(x)=\frac{\pi}{2}$ (定数関数)

以上から，$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ (定数関数) …答 ということになり，題意は示された。

(3)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)\,dx&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2\right)'f(x)\,dx \\
&=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx+\frac{1}{2}f(1) \\
&=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} \\
&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

【総括】

ここまでくると，そろそろ手垢が付きはじめたころでしょうか。