# tan の逆関数【復習用問題１】

関数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(\sqrt{3})$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $x>0$ のとき，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が定数であることを示し，その値を求めよ。

＜ ’13 芝浦工業大 ＞

**【戦略】**

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ **の計算であり，**$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ **の置換積分の一手です。**

(2) **積の形ですから部分積分を疑うのが自然です。**

**通常，**$x$ **を消すために，**$\int x(\quad)'\,dx$ **の形で見ることが多いのですが今回は** $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ **と，**$f$ **に** $'$ **の服があった方が都合がよいため** $\int_0^{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)f(x)\,dx$ **と見て部分積分を用いていきます。**

(3) **任意の** $x\ (>0)$ **に対して** $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **が定数関数となることを目指します。**

**見やすさを優先し，**$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$h(x)=f(x)+g(x)$ **とおくことにします。**

$h(x)$ **が定数関数であることを目指すには，**$h'(x)=0$ **であることを目指すのが自然でしょう。**

【解答】

(1) $f(\sqrt{3})=\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ であり，$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$$f(\sqrt{3})=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta \quad \left(\begin{array}{|c|ccc|}\hline t & 0 & \to & \sqrt{3} \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{3} \\ \hline\end{array}\ ,\ \frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}\ \cdots 答$$

(2)
$$\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)'f(x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$=\frac{3}{2}f(\sqrt{3})-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}dx+\frac{1}{2}f(\sqrt{3})$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots 答$$

(3) $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{x^2+1}$$

これより，$h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\ (=f(x)+g(x))$ とおくと

$$h'(x)=f'(x)+g'(x)$$
$$=0$$

つまり，$h(x)$ は定数関数であり，$h(x)=C$（$C$ は定数）とおける。

ここで，$f(1)=\int_0^1\dfrac{1}{1+t^2}\,dt=\dfrac{\pi}{4}$（(1) 同様に $t=\tan\theta$ の置換）

$h(1)=f(1)+f\left(\dfrac{1}{1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ より，$C=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，$h(x)=\dfrac{\pi}{2}$ (定数関数)

以上から，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ (定数関数) $\cdots$ 答 ということになり，題意は示された。

**【戦略 2】方針のみ**

$y=\tan x$ **の逆関数であることを少し押し出したような方針です。**

$x=\tan\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ **となる** $\alpha$ **を設定することで**

$$f(x)=\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

**と表すことができます。**

**そこで，**$g(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ **とおくと，**$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ **とおくことで**

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta\\&=\int_0^{\alpha}d\theta\\&=\alpha\end{aligned}$$

**を得ます。**

**これが意味するのは，** $x=\tan\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ **という置き換えにより**

$$\begin{aligned}f(x)&=f(\tan\alpha)\\&=g(\alpha)\\&=\alpha\end{aligned}$$

**という橋渡しが完成するということです。**

(1) **は** $x=\tan\alpha=\sqrt{3}$ **，すなわち** $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ **のときを考えるので**

$$f(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

(3) **は** $\dfrac{1}{x}=\tan\beta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ **となる** $\beta$ **を考えると**

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha+\beta$$

**です。**

**ここで，**$\tan\beta=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ **であることから**

$\tan\beta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ **ということになり，**$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha$，$\beta<\dfrac{\pi}{2}$ **であることから**

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha,\ \text{すなわち}\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

**を得て解決します。**

【総括】

特別前提知識を抜きにしても，手は動くはずです。

(1) の定積分は当然ですし，(2) の $'$ の服を着せかえるという部分も，手段ではなく目的を理解していれば，覚えて当てはめるような勉強しかしてこなかったり，場当たり的に解いている人たちとは差をつけられると思います。

(3) の

定数関数を目指すために，$\left\{f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}'=0$ を目指す

という発想は言われなくても自然に見えるはずです。

（例題の神戸大の問題は誘導が付いていましたが）