tan の逆関数

$x>0$ に対し関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ と定め，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2) $\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ。

＜ '12 神戸大 ＞

【戦略】

(1) **定積分で表された関数の微分です。**

定数 a に対して，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ です。

(2) **合成関数の微分 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ です。**

(3) **求めるのは $f(x)+g(x)$ です。**

(1) より $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$g'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$ と得ていることから

$\{f(x)+g(x)\}'$ を考えたくなると思います。

これにより，$\{f(x)+g(x)\}'=0$，すなわち $f(x)+g(x)$ が定数関数という結果を得ます。

$f(x)+g(x)=C$（C は定数）と置いたとき，C を決定するために何か考えやすい x（>0）の値を代入して C を決定することを考えます。

普通に考えれば，$x=\dfrac{1}{x}$ となるような x である $x=1$ でしょうか。

$f(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ については，$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の置換という定番中の定番の処理です。

【解答】

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

$=\dfrac{1}{1+x^2}$ … 答

(2) $\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{d}{dx}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$=f'\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'$

$=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$=-\dfrac{1}{x^2+1}$ … 答

(3) (1)，(2) の結果から，$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=0$

これより，$f(x)+g(x)$ は定数関数であり，$f(x)+g(x)=C$（C：定数）とおける。

ここで，$f(1)$ について考える。

$f(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ であり，$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことで

$$f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta \quad \left(\begin{array}{|c|c|}\hline t & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \\ \hline \end{array},\ \frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

となる。

$g(1)=f\left(\dfrac{1}{1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ であるため，$f(1)+g(1)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

これより，$C=\dfrac{\pi}{2}$ を得る。

以上から，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ … 答

【総括】

難易度の面から言えば，難関大受験生にとって試験場でこのレベルの問題を落とすことは許されないと言ってもよいと思います。

誘導があればなおさらでしょう。

なお，今回話題となっている $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ という関数 $f(x)$ は

$\tan x$ の逆関数が絡んでいる有名な関数です。

$y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数 $\mathrm{Arctan}\,x$ について

$$(\mathrm{Arctan}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

が成り立ちます。

$\displaystyle\int_{●}^{▲} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ で $x=\tan\theta$ とおく置換は有名でしょうが，この置き換えでうまくいく理由の一つです。

以下，このことについて触れてある入試問題を紹介します。

$f(x)=\tan x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f^{-1}(x)=\tan^{-1}x \quad (-\infty<x<\infty)$

とする。

(1)　$\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ の値を求めよ。

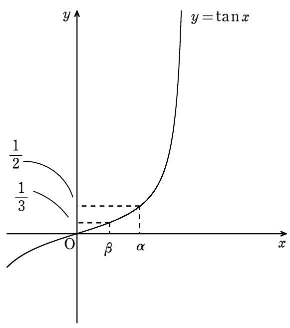
(2)　導関数 $(\tan^{-1}x)'$ を求めよ。

＜ ’14 防衛医科大 一部抜粋 ＞

【解答】

(1)　$\tan^{-1}\dfrac{1}{2}=\alpha$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\beta$ とおく。

図より，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ で $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\\&=1\end{aligned}$$

$0<\alpha+\beta<\pi$ より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ … 答

(2)　分かりやすくするため，$g(x)=f^{-1}(x)$ とおきなおす。

$y=\tan x$ の逆関数について，$x=\tan y$ … (*) を考える。

(*) の両辺を y で微分すると，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$

ゆえに (*) について $\dfrac{dy}{dx}=g'(x)=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{x^2+1}$

したがって，$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ … 答

【参考】

ちなみに，$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt \ (x>0)$ のグラフについて考えてみます。

＜$f(x)$ の単調性＞

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$ なので，$f(x)$ は単調増加です。

＜$f(x)$ の原点対称性＞

また，$\dfrac{1}{1+t^2}$ は偶関数であることから，$\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt=2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$

これより，$\displaystyle\int_{-x}^{0}\frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$

つまり，$\displaystyle-\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$ となり，$f(-x)=-f(x)$ を得ます。

これより，$f(x)$ は奇関数であることが分かります。

＜$f(x)$ の有界性＞

本問の結果を少々拝借すると，$f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ です。

つまり，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\pi}{2}-g(x)\\&=\frac{\pi}{2}-f\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

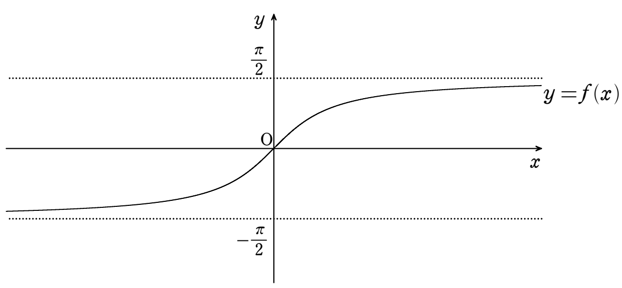
ということになり，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)&=\frac{\pi}{2}-f(0)\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

です。

$f(x)$ は奇関数でしたから，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}$ も得ることになります。

以上を踏まえると，$y=f(x)$ のグラフの概形は



です。