自然数 n に対して，$S_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots\cdots + \sin n\theta$ とおく。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) $S_n \sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{n+1}{2}\theta\ \sin\dfrac{n}{2}\theta$ が成立することを数学的帰納法によって証明せよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\theta = \dfrac{\pi}{n}$ ならば $S_n = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$ となることを示せ。

＜ '94 和歌山大 ＞

【戦略】

(1) **$n = k$ ($k = 1, 2, \cdots$) のとき，$S_k \sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{k+1}{2}\theta\ \sin\dfrac{k}{2}\theta$ と仮定し，**

$$
\begin{aligned}
S_{k+1}\sin\frac{\theta}{2} &= \{S_k + \sin(k+1)\theta\}\sin\frac{\theta}{2}\\
&= S_k\sin\frac{\theta}{2} + \sin(k+1)\theta\ \sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

と見れば，仮定が使える形になり，

$$\sin\frac{k+1}{2}\theta\ \sin\frac{k}{2}\theta + \sin(k+1)\theta\ \sin\frac{\theta}{2}$$

となります。

このあと，積の形を作るのが目標ですから，形を見て

$$\sin(k+1)\theta = 2\sin\frac{k+1}{2}\theta\cdot\cos\frac{k+1}{2}\theta$$

と，2倍角の公式を用いて $\sin\dfrac{k+1}{2}\theta$ で括ることを考えます。

これにより

$$\sin\frac{k+1}{2}\theta\left\{\sin\frac{k}{2}\theta + 2\cos\frac{k+1}{2}\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

という形を得ます。

この後，$\left\{\begin{array}{l}\text{目標である角度 } \dfrac{k+2}{2}\theta \text{ を登場させる}\\ \text{不要である角度 } \dfrac{k}{2}\theta \text{ を消す}\end{array}\right.$ ということを

見越して 積和公式を用いると目標である $n = k+1$ の成立が言えることになります。

(2) **(1) で示した等式に $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ をぶち込むだけです。**

【解答】

(1) 自然数 n に対して

$$S_n\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{n+1}{2}\theta\ \sin\frac{n}{2}\theta \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
((*)\text{ の左辺}) &= S_1\sin\frac{\theta}{2}\\
&= \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\\
&= \sin\frac{1+1}{2}\theta\cdot\sin\frac{1}{2}\theta\\
&= ((*)\text{ の右辺})
\end{aligned}
$$

となり，$(*)$ は $n = 1$ のとき成立する。

(ii) $n = k$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$) のとき

$S_k\sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{k+1}{2}\theta\ \sin\dfrac{k}{2}\theta$ が成立すると仮定する。

このとき，

$$
\begin{aligned}
S_{k+1}\sin\frac{\theta}{2} &= \{S_k + \sin(k+1)\theta\}\sin\frac{\theta}{2}\\
&= S_k\sin\frac{\theta}{2} + \sin(k+1)\theta\ \sin\frac{\theta}{2}\\
&= \sin\frac{k+1}{2}\theta\ \sin\frac{k}{2}\theta + \sin(k+1)\theta\ \sin\frac{\theta}{2}\\
&= \sin\frac{k+1}{2}\theta\ \sin\frac{k}{2}\theta + 2\sin\frac{k+1}{2}\theta\ \cos\frac{k+1}{2}\theta\ \sin\frac{\theta}{2}\\
&= \sin\frac{k+1}{2}\theta\left\{\sin\frac{k}{2}\theta + 2\cos\frac{k+1}{2}\theta\ \sin\frac{\theta}{2}\right\}\\
&= \sin\frac{k+1}{2}\theta\left\{\sin\frac{k}{2}\theta + \sin\frac{k+2}{2}\theta - \sin\frac{k}{2}\theta\right\}\\
&= \sin\frac{k+1}{2}\theta\ \sin\frac{k+2}{2}\theta
\end{aligned}
$$

となり，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

以上 (i)，(ii) から，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$S_n\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{n+1}{2}\theta\ \sin\frac{n}{2}\theta$$

が成立する。

(2) (1) で示した等式に $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
S_n\sin\frac{\pi}{2n} &= \sin\frac{n+1}{2n}\pi\ \sin\frac{\pi}{2}\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\frac{\pi}{2n}
\end{aligned}
$$

これより，$S_n = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$ となり，題意は示された。

【総括】

証明形式で「数学的帰納法によって証明せよ」という方針まで書いてくれているため，実質的には三角関数の式変形の運用がメインどころの内容となるでしょう。

難関大を目指すにあたって，ノーヒントで出題されたときのことまで考えて準備しておくことを考えてみます。

【ノーヒントで出題されたら】

n を自然数とするとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ を n を用いて表せ。

経験がモノを言いますが，

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

と複素数を持ち出し，

ド・モアブルの定理

$$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

を持ち出すことで処理することを考えます。

$$1=\cos 0$$

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

で，辺々加えると，

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)i$$

すなわち，$\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)i$ を得るため，我々が欲しい $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ は

$\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$，すなわち $\dfrac{(\cos(n+1)\theta-1)+(\sin(n+1)\theta)i}{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i}$ の虚部

ということになります。(以下 目に優しく $n+1$ を N として話を進める)

$$\frac{(\cos N\theta-1)+(\sin N\theta)i}{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i}=\frac{\{(\cos N\theta-1)+(\sin N\theta)i\}\{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i\}}{\{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i\}\{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i\}}$$

$$=\frac{\{(\cos N\theta-1)+(\sin N\theta)i\}\{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i\}}{(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{\{(\cos N\theta-1)+(\sin N\theta)i\}\{(\cos\theta-1)+(\sin\theta)i\}}{2(1-\cos\theta)}$$

分子の虚部は

$$-\sin\theta(\cos N\theta-1)+\sin N\theta(\cos\theta-1)$$

であるため，$\dfrac{z^N-1}{z-1}$ の虚部は

$$\frac{-\sin\theta(\cos N\theta-1)+\sin N\theta(\cos\theta-1)}{2(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin N\theta\cos\theta-\cos N\theta\sin\theta+\sin\theta-\sin N\theta}{2\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin(N\theta-\theta)-(\sin N\theta-\sin\theta)}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

和積公式

$$=\frac{\sin(N-1)\theta-2\cos\dfrac{N+1}{2}\theta\,\sin\dfrac{N-1}{2}\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

2 倍角公式

$$=\frac{2\sin\dfrac{N-1}{2}\theta\,\cos\dfrac{N-1}{2}\theta-2\cos\dfrac{N+1}{2}\theta\,\sin\dfrac{N-1}{2}\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{N-1}{2}\theta\left\{\cos\dfrac{N-1}{2}\theta-\cos\dfrac{N+1}{2}\theta\right\}}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

和積公式

$$=\frac{2\sin\dfrac{N-1}{2}\theta\cdot(-2)\sin\dfrac{\left(\dfrac{N-1}{2}+\dfrac{N+1}{2}\right)\theta}{2}\,\sin\dfrac{\left(\dfrac{N-1}{2}-\dfrac{N+1}{2}\right)\theta}{2}}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{-4\sin\dfrac{N-1}{2}\theta\,\sin\dfrac{N\theta}{2}\,\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{N-1}{2}\theta\,\sin\dfrac{N\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

ということになり，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\dfrac{N-1}{2}\theta\,\sin\dfrac{N\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cdot\sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\quad(\because\ N=n+1)$$

を得ることができます。

なお，

$S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}$ とおいたとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}S_n$$

を求めよ。

というオチも考えられます。

流れとしては

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin\frac{n-1}{2}\theta\ \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ に対して，$\theta = \frac{\pi}{n}$ とすることで

$$\frac{\pi}{2n}S_n = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}S_n = 1$ となります。