

\sqrt{n} の整数部分に関する考察問題

実数 a に対して、 a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。

< '12 東京工業大 >

【戦略】

$\frac{n}{[\sqrt{n}]}$ が整数となる n が 10000 以下の中に何個あるかという問題です。

$$f(n) = \frac{n}{[\sqrt{n}]} \text{ とすると}$$

$$f(1) = \frac{1}{1}, f(2) = \frac{2}{1}, f(3) = \frac{3}{1}$$

$$f(4) = \frac{4}{2}, f(5) = \frac{5}{2}, f(6) = \frac{6}{2}, f(7) = \frac{7}{2}, f(8) = \frac{8}{2}$$

$$f(9) = \frac{9}{3}, f(10) = \frac{10}{3}, f(11) = \frac{11}{3}, f(12) = \frac{12}{3}, f(13) = \frac{13}{3}, f(14) = \frac{14}{3}, f(15) = \frac{15}{3}$$

と、 $[\sqrt{n}] = 1, [\sqrt{n}] = 2, [\sqrt{n}] = 3, \dots$ のように

$$[\sqrt{n}] = m \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

となるようなグループを考えたいです。(群数列のような考え方です。)

$[\sqrt{n}] = m$ となるのは

$$n = m^2, m^2 + 1, \dots, (m + 1)^2 - 1 \quad (= m^2 + 2m)$$

このうち、 $f(n) = \frac{n}{m}$ が整数となるのは何個かを考えると

n が m で括れる

$$n = m^2, m^2 + m, m^2 + 2m \text{ の } 3 \text{ 個}$$

だと分かるでしょう。

あるいはもう少し明確に、

$$m \leq \sqrt{n} < m + 1$$

$$m^2 \leq n < (m + 1)^2$$

$$m^2 \leq n < m^2 + 2m + 1$$

$$m \leq \frac{n}{m} < m + 2 + \frac{1}{m}$$

$$m \leq f(n) < m + 2 + \frac{1}{m}$$

として、 $f(n) = m, m + 1, m + 2$ という 3 個

としてもよいでしょう。(上の実験の結果にもマッチしています。)

つまり、各群には 3 個ずつ $f(n)$ が整数となるものが含まれています。

あとは第何群まであるかを考えますが、 $f(10000)$ が第 100 群の先頭であることを考えます。

第 1 群 ~ 第 99 群までの各群に 3 個ずつ題意の n があり、第 100 群の先頭の $n = 10000$ のときを加えた $3 \cdot 99 + 1 = 298$ 【個】 です。

【解答】ではこれをフォーマルに記述します。

【解答】

$f(n) = \frac{n}{[\sqrt{n}]}$ ($n = 1, 2, \dots, 10000$) として、 $f(n)$ が整数となる 10000 以下の正の整数 n の個数を求める。

$[\sqrt{n}] = m$ ($m = 1, 2, 3, \dots, 99$) とすると

$$m \leq \sqrt{n} < m + 1$$

$$m^2 \leq n < (m + 1)^2$$

$$m^2 \leq n < m^2 + 2m + 1$$

$$m \leq \frac{n}{m} < m + 2 + \frac{1}{m}$$

$$m \leq f(n) < m + 2 + \frac{1}{m}$$

$f(n)$ が整数となるとき、 $f(n) = m, m + 1, m + 2$

つまり、 $[\sqrt{n}] = m$ ($m = 1, 2, \dots, 99$) を満たすなかで考えたとき $f(n)$ が整数となる n は 3 個。

$[\sqrt{n}] = 100$ を満たす 10000 以下の正の整数 n は $n = 10000$ の 1 個のみ。

このとき、 $f(10000) = \frac{10000}{100} = 100$ (=整数) となり、題意を満たす。

以上から求める n の個数は $3 \cdot 99 + 1 = 298$ 【個】 … 答

【総括】

実験して手を動かすことで、見るべき部分に目を向けられるはずです。

(にらめっこしても立ち往生するだけでしょ。)

【戦略】では群数列のように捉えて考えましたが、【解答】では少々天下的に群数列を前面に出さずにまとめました。

いわゆる「解答」しかない問題集で、こういった類の問題を自学自習するとなると中々大変であり、本問は自学自習する上で最も難しい要素である

「聞けばそうだけど、どっからその発想が出てきたのか」

という類の問題でしょう。