e が無理数であることの証明

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^ne^{1-x}$ と，その定積分

$$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

を考える。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2) a_1 を求めよ。$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n\,!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n\,!}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n\,!e$ は整数とならないことを示せ。

< ’97 大阪大 >