$e\,(=2.718\cdots)$ を自然対数の底とする。

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$f_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ とおく。

$x>0$ のとき，$f_n(x)<e^x<f_n(x)+\dfrac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$ を示せ。

(2) $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ のとき，

$0<n!e-[n!+1+\{n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\cdots+n!\}]<1$

であることを示せ。

(3) e は有理数でないことを示せ。

＜ '90 金沢大 ＞

【戦略】

(1) **差を取って微分しようとすると思います。**

その際，$f_n{}'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$**，すなわち**

$f_n{}'(x)=f_{n-1}(x)$ **という漸化式的な関係式が目に付くでしょうから，数学的帰納法で仕留める路線に乗りたいところです。**

(2) **目がチカチカしますが，真ん中の**

$$n!+1+n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\cdots+n!$$

という部分は $n!$ **で括ってやると**

$$n!\left\{1+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-3)!}+\cdots+1\right\}$$

すなわち $n!f_n(1)$ **ですから，結局示すべき不等式は**

$$0<n!e-n!f_n(1)<1$$

ということになり，それさえ見抜ければ，(1) **の不等式において** $x=1$ **をぶち込みたくなるでしょう。**

(3) $e=\dfrac{q}{p}$ ($p,\ q$ **は互いに素な自然数**) **と仮定し，背理法で仕留めます。**

(2) **の不等式にぶち込んでみると**

$$0<n!\frac{q}{p}-[n!+1+\{n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\cdots+n!\}]<1$$

最後のオチを「真ん中が整数であることに対して矛盾する」というシナリオが描ければ，少し微調整して

$e=\dfrac{m}{n}$ ($m,\ n$ **は互いに素な自然数**) **と設定しなおせるでしょう。**

もちろん，この設定における n **のときも** (2) **の不等式は成立します。**

【解答】

(1) $F_n(x)=e^x-f_n(x)$，$G_n(x)=f_n(x)+\dfrac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}-e^x$ とする。

$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$x>0\ \text{の範囲で}\ \begin{cases}F_n(x)>0\\ G_n(x)>0\end{cases}\ \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

$F_1(x)=e^x-(1+x)$ で，$F_1{}'(x)=e^x-1>0$ ($\because\ x>0$)

ゆえに，$x>0$ で $F_1(x)$ は単調増加。

したがって，$F_1(x)>F_1(0)=0$

一方，$G_1(x)=1+x+\dfrac{x^2e^x}{2}-e^x$ で，$G_1{}'(x)=1+xe^x+\dfrac{x^2e^x}{2}-e^x$

$$\begin{aligned}G_1{}''(x)&=e^x+xe^x+xe^x+\frac{x^2e^x}{2}-e^x\\&=x\left(\frac{x}{2}+2\right)e^x>0\ (\ \because\ x>0\ )\end{aligned}$$

ゆえに，$x>0$ の範囲で $G_1{}'(x)$ は単調増加。

これより，$G_1{}'(x)>G_1{}'(0)=0$

$x>0$ の範囲で $G_1(x)$ も単調増加となり，$G_1(x)>G_1(0)=0$

$n=1$ のとき，(*) は成立する。

(ii) $n=k$ ($k=1,\ 2,\ \cdots$) のとき

$x>0$ の範囲で $\begin{cases}F_k(x)>0\\ G_k(x)>0\end{cases}$ と仮定する。

$F_{k+1}(x)=e^x-f_{k+1}(x)$ であり，

$$\begin{aligned}F'_{k+1}(x)&=e^x-f_k(x)\\&=F_k(x)\\&>0\ (\text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

よって，$F_{k+1}(x)$ は $x>0$ で単調増加なので

$F_{k+1}(x)>F_{k+1}(0)=0$

一方，$G_{k+1}(x)=f_{k+1}(x)+\dfrac{x^{k+2}e^x}{(k+2)!}-e^x$ であり

$$\begin{aligned}G'_{k+1}(x)&=f'_{k+1}(x)+\frac{x^{k+1}e^x}{(k+1)!}+\frac{x^{k+2}e^x}{(k+2)!}-e^x\\&=f_k(x)+\frac{x^{k+1}e^x}{(k+1)!}+\frac{x^{k+2}e^x}{(k+2)!}-e^x\\&>f_k(x)+\frac{x^{k+1}e^x}{(k+1)!}-e^x\\&=G_k(x)\\&>0\ (\text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

以上から，$n=k+1$ のときも (*) は成立する。

(i)，(ii) より，題意は示された。

(2)　示すべき不等式に現れる

$$n\,!+1+\{n+n\,(n-1)+n\,(n-1)\,(n-2)+\cdots+n\,!\}$$

を，M_n とおく。

$$\begin{aligned} M_n &= n\,!\left\{1+\frac{1}{n\,!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+1\right\} \\ &= n\,!\,f_n(1) \end{aligned}$$

であるため，$n \geqq 2$ において，$0<n\,!e-n\,!\,f_n(1)<1$ を示せばよい。

(1) の不等式において $x=1$ とすると $f_n(1)<e<f_n(1)+\dfrac{e}{(n+1)!}$

辺々 $f_n(1)$ を引くと，$0<e-f_n(1)<\dfrac{e}{(n+1)!}$

$n \geqq 2$ という条件

辺々 $n\,!$ をかけると $0<n\,!\,e-n\,!\,f_n(1)<\dfrac{e}{n+1}<1$

となり，題意の不等式が示された。

(3)　e が有理数と仮定する。

さすがに e が整数でないということは認めさせてください

このとき，$e=\dfrac{m}{n}$（n，m は互いに素な自然数で $n \geqq 2$）と表せる。

この n に対しても (2) の不等式は成り立つため

$$0<n\,!\frac{m}{n}-[n\,!+1+\{n+n\,(n-1)+n\,(n-1)\,(n-2)+\cdots+n\,!\}]<1$$

これを整理すると

$$0<(n-1)!\,m-[n\,!+1+\{n+n\,(n-1)+n\,(n-1)\,(n-2)+\cdots+n\,!\}]<1$$

ということになるが，明らかに真ん中の項は整数であり不合理。

以上から，e は無理数である。

【総括】

目がチカチカしますから，少しでも目に優しくしたいところです。

(3) の【戦略】における微調整は少し難しかったかもしれません。

大阪大学と埼玉大学が積分を利用する路線に対して，本問は微分を利用する方針の問題でした。

【類題１】（埼玉大学の問題）に現れる $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ と，

$0<I_n<\dfrac{1}{n+1}$ という不等式から，今回の (2) の不等式が得られます。

（【類題１】の【総括】を参照してください。）

なお，今回の $f_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}$ という設定は

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}+\cdots\cdots\left(=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}\right)$$

という e^x のテイラー展開 (マクローリン展開) が元です。

この無限和を途中で止めると，本問 (1) のように

$$e^x \geqq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}\ (=f_n(x))$$

と誤差が生まれます。

この誤差を埋めるようなものとして有名なものが「剰余項」と呼ばれるもので

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n\,!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n\,!}e^t\,dt$$

などが有名です。