e が無理数であることの証明【類題 1】

非負整数 n に対して，$I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ とおく。

(1) $\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=e(n!-I_n)$ で定義する。非負整数 n に対して a_n は整数であることを示せ。

(3) $e>0$ であるから，もし e が有理数なら正の整数 p，q によって $e=\frac{q}{p}$ となる。これに注意して e が無理数であることを証明せよ。

＜ '90 埼玉大 ＞

【戦略】

(1) **積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq \frac{x^n}{e^x}\leqq \frac{x^n}{e^0}$ と「体の一部を定数化」することによって，$\int_0^1 0\,dx<I_n<\int_0^1 x^n\,dx$ と評価してやります。**

これにより，$0<I_n<\frac{1}{n+1}$ …① を得ます。

もちろん最後のオチは「はさみうちの原理」です。

(2) **数学的帰納法で仕留めるビジョンが見えていれば，よく分からない一般項よりも，「漸化式」の方が扱いやすいと思えるはずです。**

「部分積分からの積分漸化式」というセオリーに従って積分漸化式を作成し，さらには a_n に関する漸化式を作成していきます。

(3) **余計なお世話的なリード文がありますが，e が有理数，すなわち**

$$e=\frac{q}{p}\ (p,\ q\ は互いに素な正の整数)$$

と表せると仮定します。

(1)，(2) が何らかの形で矛盾に関わってくるであろうことを身構えながら観察していきます。

まずは，$a_n=\frac{q}{p}(n!-I_n)$ ですから，分母を払って整理すると

$qI_n=q\cdot n!-pa_n$ となります。

(1) の途中経過である ① より，$qI_n>0$ であり，(2) の結果から右辺の $q\cdot n!-pa_n$ は整数です。

つまり，qI_n は正の整数ということになり，$qI_n\geqq 1$ となります。

もちろんこの $qI_n\geqq 1$ は任意の n で成立することから，n が十分大きなときにも成立することになりますが，(1) の結果から，n が十分大きいとき，$\lim_{n\to\infty} I_n=0$ ということになり矛盾します。

【解答】

(1) 積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq \frac{x^n}{e^x}\leqq \frac{x^n}{e^0}$，すなわち

$0\leqq x^n e^{-x}\leqq x^n$ であり，等号は常には成立しないので

$$\int_0^1 0\,dx<I_n<\int_0^1 x^n\,dx$$

これより，$0<I_n<\frac{1}{n+1}$ …① を得る。

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であり，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} I_n=0$ となる。

(2)
$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\int_0^1 x^{n+1}(-e^{-x})'\,dx\\
&=\left[-\frac{x^{n+1}}{e^x}\right]_0^1-\int_0^1 (n+1)x^n(-e^{-x})\,dx\\
&=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=e\{(n+1)!-I_{n+1}\}\\
&=e\left\{(n+1)!-(n+1)I_n+\frac{1}{e}\right\}\\
&=e\left\{(n+1)\{n!-I_n\}+\frac{1}{e}\right\}\\
&=(n+1)e(n!-I_n)+1\\
&=(n+1)a_n+1
\end{aligned}$$

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
a_1&=\int_0^1 x e^{-x}\,dx\\
&=\left[-\frac{x}{e^x}\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})\,dx\\
&=-\frac{1}{e}-\left[e^{-x}\right]_0^1\\
&=-\frac{1}{e}-\left\{\frac{1}{e}-1\right\}\\
&=1
\end{aligned}$$

(ii) $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

a_k が整数だと仮定する。

このとき，$a_{k+1}=(k+1)a_k+1$
$=$(整数)（∵ 帰納法の仮定より）

ゆえに，a_k が整数と仮定したとき，a_{k+1} も整数となる。

以上 (i)，(ii) より，$n=1,2,\cdots$ に対して a_n は整数である。

(3) e が有理数だと仮定すると，$e=\frac{q}{p}$ (p，q は互いに素な正の整数) と表せる。

$a_n=\frac{q}{p}(n!-I_n)$ であり，$qI_n=q\cdot n!-pa_n$ …② を得る。

① より，$qI_n>0$

(2) より，② の右辺は整数

これより，qI_n は正の整数である。

ゆえに，$qI_n \geqq 1$，すなわち $I_n \geqq \dfrac{1}{q}$ が任意の自然数 n について成立する。

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n \geqq \frac{1}{q}$ であり，$0 \geqq \dfrac{1}{q}$ となるが，$q>0$ であるため，$\dfrac{1}{q}>0$ となり，矛盾する。

以上から e は無理数である。

【総括】

大阪大学の問題では $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ を考えることにより

$$0<a_n<1$$

$$a_{n+1}=(n+1)a_n-1$$

$$\frac{a_n}{n\,!}=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)$$

という流れで，$n\,!e$ が整数とはならないことを示すことで，e が無理数であることを証明しました。

本問の $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ に対して，eI_n を考えてやると

$eI_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ となります。これを J_n とおいてみます。

本問の中で得られる $I_{n+1}=(n+1)\,I_n-\dfrac{1}{e}$ の分母を払えば

$$J_{n+1}=(n+1)\,J_n-1$$

という結果となります。

例題で扱った大阪大学とほぼ同種の問題であることが分かると思います。

【参考】

一般に

$$\int f(x)\,e^{-x}\,dx=-e^{-x}\{\,f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots\cdots\,\}+C$$

であることを用いて，本問の $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\,e^{-x}\,dx$ を計算してみると

$$I_n=\Big[\,-e^{-x}\{\,x^n+nx^{n-1}+n\,(n-1)\,x^{n-2}+\cdots\cdots+n\,!\,\,\}\Big]_0^1$$

$$=-e^{-1}\{\,1+n+n\,(n-1)+n\,(n-1)\,(n-2)+\cdots\cdots+n\,!\,\}+n\,!$$

これより，

$$eI_n=n\,!\,e-\{\,1+n+n\,(n-1)+n\,(n-1)\,(n-2)+\cdots\cdots+n\,!\,\}$$

ということが言えます。

【解答】の中の ① より $0<I_n<\dfrac{1}{n+1}$ を用いると

$0<eI_n<\dfrac{e}{n+1}$ で，$n\geqq 2$ であれば $\dfrac{e}{n+1}<1$ であるため

$$0<eI_n<1\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち，$n=2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$0<n\,!\,e-\{\,1+n+n\,(n-1)+n\,(n-1)\,(n-2)+\cdots\cdots+n\,!\,\}<1$$

ということが言えます。

この不等式から切り込んだ問題が同じ年の金沢大学で出題されています。
（【類題２】で紹介しています。）