自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=x^n e^{1-x}$ と，その定積分

$$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

を考える。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2) a_1 を求めよ。$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n\,!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n\,!}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n\,!e$ は整数とならないことを示せ。

＜ '97 大阪大 ＞

【戦略】

(1) **手なりに $f'_n(x)$ を調べると，$f'_n(x)\geqq 0$ だと分かりますから $f_n(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加だと分かります。**

これより，$f_n(0)\leqq f_n(x)\leqq f_n(1)$，すなわち $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ が得られます。

この辺々を 0 から 1 まで積分することで

$\displaystyle\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx<\int_0^1 1\,dx$，**すなわち $0<a_n<1$ が成立することになります。**

(2) **裸の x がいる積の形ということで，部分積分で仕留めます。**

積分漸化式の作成についても，セオリー通り「部分積分からの作成」で問題ありません。

(3) **(2) の漸化式を活用することになりますが，最終的に $\dfrac{a_n}{n\,!}$ を考えるので，(2) で得た $a_n=na_{n-1}-1$ の両辺を $n\,!$ で割るという発想が自然でしょうか。**

あとは階差数列の処理ということになります。

(4) **否定的な命題に関する証明問題ですから，背理法という路線を選択したいところです。**

任意の n に対して 〜〜 とならない

を否定すると

ある n に対して 〜〜 となる

ということになります。

〜〜となるような「特別な n が存在する」と仮定するので，ここでは特別感を出すために，$n=N$ という特別な N に対して

$N\,!\,e$ が整数になる

と仮定します。

このあとは今までの誘導が次々と効いてきます。

【解答】

(1)
$$f'_n(x)=nx^{n-1}\cdot e^{1-x}+x^n\cdot(-e^{1-x})$$
$$=(n-x)x^{n-1}e^{1-x}$$

$n=1，2，\cdots$ であり，$0\leqq x\leqq 1$ においては $f'_n(x)\geqq 0$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ において $f_n(x)$ は単調増加。

よって，$f_n(0)\leqq f_n(x)\leqq f_n(1)$，すなわち $0\leqq f_n(x)\leqq 1$ が成立する。

この等号は常には成立しないため

$\displaystyle\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx<\int_0^1 1\,dx$，すなわち $0<a_n<1$ が成立する。

(2)
$$\begin{aligned}a_1&=\int_0^1 x\,e^{1-x}\,dx\\&=\int_0^1 x\,(-e^{1-x})'\,dx\\&=\Big[-x\,e^{1-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e)^{1-x}\,dx\\&=-1-\Big[e^{1-x}\Big]_0^1\\&=-1-\{e^0-e^1\}\\&=e-2\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

また，$n>1$ に対して

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx\\&=\int_0^1 x^n\,(-e^{1-x})'\,dx\\&=\Big[-x^n e^{1-x}\Big]_0^1-\int_0^1 nx^{n-1}(-e^{1-x})\,dx\\&=-1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx\\&=na_{n-1}-1\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3) (2) で得た漸化式の両辺を $n\,!$ で割ると，$\dfrac{a_n}{n\,!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n\,!}$

すなわち $\dfrac{a_n}{n\,!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=-\dfrac{1}{n\,!}$

$b_n=\dfrac{a_n}{n\,!}$ とおくと，$b_n-b_{n-1}=-\dfrac{1}{n\,!}$ $(n=2，3，4，\cdots)$

$n\geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\\&=\frac{a_1}{1!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{(k+1)!}\right\}\\&=(e-2)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)\\&=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)\ \cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると $b_1=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}\right)=e-2$

であり，$b_1=\dfrac{a_1}{1!}=e-2$ なので，$(*)$ は $n=1$ のときも正しい結果を与える。

ゆえに，自然数 n に対して

$$\frac{a_n}{n\,!}=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)$$

となり，題意は示された。

(4) ある整数 N に対して $N\,!\,e$ が整数になると仮定する。

(3) より，$\dfrac{a_N}{N\,!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{N\,!}\right)$

これより

$$\begin{aligned}a_N&=N\,!\,e-N\,!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{N\,!}\right)\\&=(\text{整数})-(\text{整数})\\&=(\text{整数})\end{aligned}$$

となる。

しかし，(1) から $0<a_N<1$ であり，a_N は整数とならず矛盾する。

以上から，任意の自然数 n に対して $n\,!e$ は整数とならない。

【総括】

定積分と不等式評価，積分漸化式の作成

など，基本的な項目を含んでおり，誘導もしっかりあることを考えると演習として教育的な問題です。

この問題のオチからさらに話を進めてみます。

e が有理数と仮定すると $e=\dfrac{N}{M}$ (N，M は互いに素な自然数) と表せます。

このとき，(4) の結果は $n\,!\cdot\dfrac{N}{M}$ が任意の自然数 n に対して整数とならないという結果を意味します。

ところが，十分大きな n だと $n\,!$ によって M を消すことができるでしょう。

(少なくとも $n=M$ であれば，$M\,!\cdot\dfrac{N}{M}=(M-1)!\cdot N$ という整数となります。)

これは (4) の結果に矛盾するため，e は無理数であることになるわけです。

これを直接聞かないで，「これが意味することは分かるよね」という部分で止めている阪大の出題の仕方がニクいですね。（誉め言葉）