

180°しか回転しない回転体の体積

a を正の実数とし、空間内の2つの円板

$$D_1 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a \}$$

$$D_2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a \}$$

を考える。 D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし、回転は z 軸の正の部分から x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。

E の体積を $V(a)$ とし、 E と $\{ (x, y, z) \mid x \geq 0 \}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

- (1) $W(a)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

< '09 東京大 >