a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$$
$$D_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし，回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。

E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,y,z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

＜ ’09 東京大 ＞

【戦略】

空間図形の回転体の体積を扱っている点では，難関校頻出の話題ですが，本問の場合は少し勝手が違います。その原因は

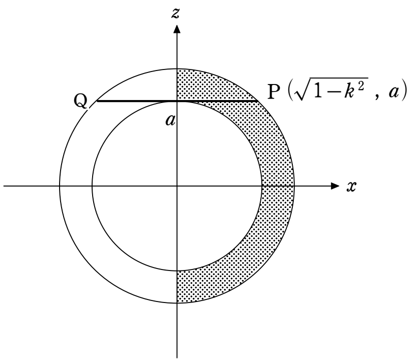
①：180° しか回転しない

②：そのせいで断面積を正確に出すことが困難

ということにあります。

回転軸 (今回は y 軸) に垂直に切って，その切り口の図形の回転体の面積を求めて，積分するというおおまかな方針は変わりません。

(1) では，$x\geqq 0$ の部分のみを考えるので断面積は



という半円の差を取ればおしまいですが，(2) では $x<0$ の部分 (左側にはみ出た部分) を直接出すのが困難です。(円が絡んでくるとその面積を出すためにはどうしても中心角が必要になるからです。)

しかし，幸いなことに今回は $V(a)$ そのものが問われているわけではなく，

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ という極限が問われています。

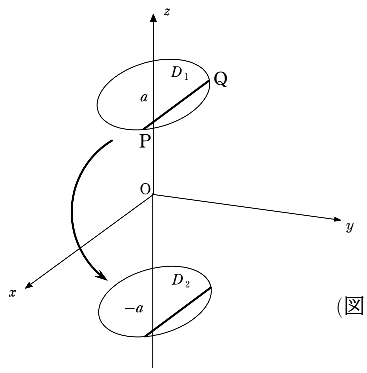
$a\to\infty$ のときをイメージしてみると，２つの円の半径はほとんど同じですからはみ出た部分など取るに足らない ”ゴミ” みたいなものだと分かります。

$W(a)\leqq V(a)$ なのは明らかに分かりますから，あとは $V(a)\leqq$ ○ と上から押さえて「はさみうちの原理」に持ち込むという流れが見えればおしまいです。

その際はみ出た部分を簡単に面積計算できる形で評価しようと思うと，思い切って長方形で覆ってしまいましょう。（ざっくり過ぎてダメだったらそのときはそのときで考えればいい，ぐらいの気持ちで）

【解答】

(1)



(図 1)

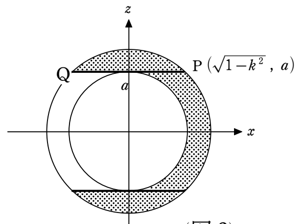
D_1 を $y=k$ $(-1\leqq k\leqq 1)$ で切った切り口 ((図 1) の線分 PQ) を題意の向きに 180° 回転させてできる図形は (図 2) の打点部であり，これが E の $y=k$ による切り口である。

外側の円の半径 R は

$R=\sqrt{(\sqrt{1-k^2})^2+a^2}=\sqrt{1-k^2+a^2}$

内側の円の半径 r は

$r=a$



(図 2)

このうち $x\geqq 0$ を満たす部分の面積 $S(k)$ は

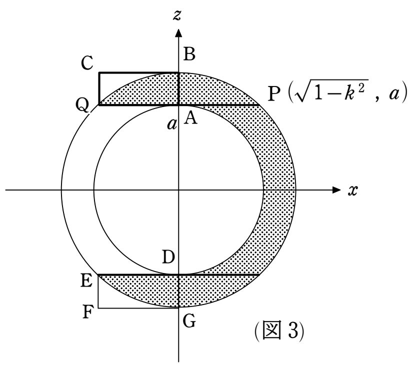
$$S(k)=\frac{1}{2}(\pi R^2-\pi r^2)=\frac{\pi}{2}(1-k^2)$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}W(a)&=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}(1-k^2)\,dk\\&=\pi\int_0^1(1-k^2)\,dk\ (\because \text{偶関数の性質})\\&=\pi\left[k-\frac{k^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{2}{3}\pi\ \cdots 答\end{aligned}$$

(2) E の $y=k$ による断面積を $T(k)$ とする。

$S(k)\leqq T(k)\leqq$(長方形ABCQ の面積)$+$(長方形 DEFG の面積)$+S(k)$



(図 3)

$$
\begin{aligned}
(\text{最右辺}) &= 2\sqrt{1-k^2}\times(R-r)+S(k)\\
&= 2\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{1-k^2+a^2}-a\right)+S(k)\\
&= 2\sqrt{1-k^2}\times\frac{1-k^2}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}+S(k)\\
&= \frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}+S(k)\\
&\leqq \frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{a}+S(k)
\end{aligned}
$$

この最後の評価は大事です。（理由は【総括】で）

よって，$W(a)\leqq\int_{-1}^{1}T(k)\,dk\leqq\int_{-1}^{1}\frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{a}\,dk+W(a)$

すなわち，$\frac{2}{3}\pi\leqq V(a)\leqq\frac{2}{a}\int_{-1}^{1}(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\,dk+\frac{2}{3}\pi$

$\lim_{a\to\infty}(\text{最右辺})=\frac{2}{3}\pi$ なので，はさみうちの原理から $\lim_{a\to\infty}V(a)=\frac{2}{3}\pi$ …答

【総括】

全体的には完答はハードかもしれませんが，(1) まで落としてしまうと試験場では大きな痛手となるでしょう。

円板の通過領域の体積で，動きそのものは単純に追うことができますが，180°しか回転しないという設定によって，勝手が違います。

当然断面積の積分で体積を出そうという気持ちに走りますが，円が絡んだ断面積ではどうしても中心角を設定する必要性があり，$V(a)$ を直接出すのは困難を極めます。

問われていることが極限であること，さらに本人不在ということを併せて考えて早めに「はさみうちの原理」に照準を合わせたいところです。

なお，

$$
\begin{aligned}
(\text{最右辺}) &= 2\sqrt{1-k^2}\times(R-r)+S(k)\\
&= 2\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{1-k^2+a^2}-a\right)+S(k)\\
&= 2\sqrt{1-k^2}\times\frac{1-k^2}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}+S(k)\\
&= \frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}+S(k)\\
&\leqq \frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{a}+S(k)
\end{aligned}
$$

と評価しましたが，この最後の評価をせずに

$$
\begin{aligned}
(\text{最右辺}) &= 2\sqrt{1-k^2}\times(R-r)+S(k)\\
&= 2\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{1-k^2+a^2}-a\right)+S(k)\\
&= 2\sqrt{1-k^2}\times\frac{1-k^2}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}+S(k)\\
&= \frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}+S(k)
\end{aligned}
$$

として，

$$W(a)\leqq\int_{-1}^{1}T(k)\,dk\leqq\int_{-1}^{1}\frac{2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}\,dk+W(a)$$

で，最右辺について $a\to\infty$ のときを考えると $\int_{-1}^{1}0\,dk+\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$

だからこれでいいんじゃないか？と思われるかもしれませんが，これは危険な解答です。

一般に，$\underbrace{\lim_{a\to\infty}\int_{\bigcirc}^{\triangle}f(a)\,d\square}_{\text{積分したものの極限}}=\underbrace{\int_{\bigcirc}^{\triangle}\lim_{a\to\infty}f(a)\,d\square}_{\text{極限をとったものの積分}}$ が成り立つ保証はありません。

つまり，一般には「積分と極限の順序交換はできない」ことを意味します。

感覚的に極限を考えるとこのような事故が発生するので，十分に注意してください。

同様に

$S(k) \leqq T(k) \leqq$(長方形ABCQ の面積)$+$(長方形 DEFG の面積)$+S(k)$ で，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}((\text{長方形 ABCQの面積})+(\text{長方形 DEFG の面積})) \\
&=\lim_{a\to\infty} 2\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{1-k^2+a^2}-a\right) \\
&=\frac{2(1-k^2)}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a} \\
&=0
\end{aligned}
$$

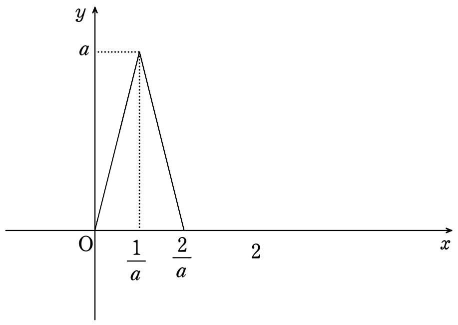
だから，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} T(k)=S(k)$

とやるのも危険な議論です。

断面積の段階で極限を取ってしまっているから，先ほどの順序の話になってきます。

＜ 積分と極限の順序交換ができない有名な例 ＞

$$
f_a(x)=\begin{cases} a^2x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{a} \text{ のとき}\right) \\ -a^2x+2a & \left(\dfrac{1}{a} \leqq x \leqq \dfrac{2}{a} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2}{a} \leqq x \leqq 2 \text{ のとき}\right) \end{cases}
$$



$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\int_0^2 f_a(x)\,dx &= \lim_{a\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{1}{a}} a^2x\,dx+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}}(-a^2x+2a)\,dx+\int_{\frac{2}{a}}^{2} 0\,dx\right\} \\
&=\lim_{a\to\infty}\left\{a^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{a}}+\left[-a^2\frac{x^2}{2}+2ax\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}}\right\} \\
&=\lim_{a\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right\} \\
&=1
\end{aligned}
$$

一方，$\displaystyle\int_0^2 \lim_{a\to\infty} f_a(x)\,dx=\int_0^2 0\,dx=0$

となり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^2 f_a(x)\,dx \neq \int_0^2 \lim_{a\to\infty} f_a(x)\,dx$ である。