以下の各問いに答えよ。

(1)　次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{7}{4},\ a_n=\frac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}\quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

(2)　次のように定義される数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_1=2,\ b_2=\frac{5}{2},\ b_3=\frac{17}{4}$$

$$b_n=\frac{7}{2}b_{n-1}-\frac{7}{2}b_{n-2}+b_{n-3}\quad (n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$$

＜ ’05 東京医科歯科大 ＞

【戦略 1】

(1)　**典型的な隣接 3 項間漸化式です。**

見慣れている $a_{n+2}-\frac{5}{2}a_{n+1}+a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ **という形で考えます。**

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ **という等比数列の構造をもつ形に変形したいという思いは，**

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 \quad \text{と} \quad a_{n+2}-\frac{5}{2}a_{n+1}+a_n=0$$

を見比べるということに行き着くでしょう。

$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{5}{2}\\ \alpha\beta=1\end{cases}$ **という** $\alpha,\ \beta$ **が見つかればよく，解と係数の関係から**
$x^2-\frac{5}{2}x+1=0$ **の解ということになり，これを整理すると**
$2x^2-5x+2=0$ **すなわち** $(2x-1)(x-2)=0$ **となりますから解は**
$x=\frac{1}{2},\ 2$ **となります。**

これより $(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{1}{2},\ 2\right),\ \left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ **となりますから**

$$\begin{cases}a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)\\ a_{n+2}-2a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n)\end{cases}$$

という 2 通りの変形ができます。

(2)　**一見どうしたらよいだろうかとフリーズするかもしれませんが，上の 3 項間漸化式の「ココロ」があれば**

$b_{n+3}+\alpha b_{n+2}+\beta b_{n+1}=\gamma(b_{n+2}+\alpha b_{n+1}+\beta b_n)$ **と変形したいと思うでしょう。**

$b_{n+3}+(\alpha-\gamma)b_{n+2}+(\beta-\gamma\alpha)b_{n+1}-\beta\gamma b_n=0$ **と**
$b_{n+3}-\frac{7}{2}b_{n+2}+\frac{7}{2}b_{n+1}-b_n=0$ **を見比べて** $\begin{cases}\alpha-\gamma=-\frac{7}{2}\\ \beta-\gamma\alpha=\frac{7}{2}\\ \beta\gamma=1\end{cases}$

これを解くと

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(-\frac{5}{2},\ 1,\ 1\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right),\ \left(-3,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$$

を得ることになり，解決します。

【解 1】

(1)　与えられた漸化式は $a_{n+2}-\frac{5}{2}a_{n+1}+a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
と同じことであり，これは

$$\begin{cases}a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)\ \cdots①\\ a_{n+2}-2a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n)\ \cdots②\end{cases}$$

と 2 通りに変形できる。

① より，
$$\begin{aligned}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n&=\left(a_2-\frac{1}{2}a_1\right)\cdot 2^{n-1}\\&=\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2^{n-1}\\&=\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}\ \cdots①'\end{aligned}$$

② より，
$$\begin{aligned}a_{n+1}-2a_n&=(a_2-2a_1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{7}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \cdots②'\end{aligned}$$

①′－②′ より，$\frac{3}{2}a_n=\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって，

$$\begin{aligned}a_n&=2^{n-1}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=2^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\ \cdots 答\end{aligned}$$

(2)　与えられた漸化式は $b_{n+3}-\frac{7}{2}b_{n+2}+\frac{7}{2}b_{n+1}-b_n=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$
と同じことであり，これは

$$\begin{cases}b_{n+3}-\frac{5}{2}b_{n+2}+b_{n+1}=b_{n+2}-\frac{5}{2}b_{n+1}+b_n\ \cdots③\\ b_{n+3}-\frac{3}{2}b_{n+2}+\frac{1}{2}b_{n+1}=2\left(b_{n+2}-\frac{3}{2}b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n\right)\ \cdots④\\ b_{n+3}-3b_{n+2}+2b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_{n+2}-3b_{n+1}+2b_n)\ \cdots⑤\end{cases}$$

と 3 通りに変形できる。

③ より，
$$\begin{aligned}b_{n+2}-\frac{5}{2}b_{n+1}+b_n&=b_3-\frac{5}{2}b_2+b_1\\&=0\ \cdots③'\end{aligned}$$

④ より，
$$\begin{aligned}b_{n+2}-\frac{3}{2}b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n&=\left(b_3-\frac{3}{2}b_2+\frac{1}{2}b_1\right)\cdot 2^{n-1}\\&=\frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}\ \cdots④'\end{aligned}$$

⑤ より，
$$\begin{aligned}b_{n+2}-3b_{n+1}+2b_n&=(b_3-3b_2+2b_1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \cdots⑤'\end{aligned}$$

③′−④′ より $-b_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_n=-\dfrac{3}{2}\cdot 2^{n-1}$ $\cdots$ ⑥

④′−⑤′ より $\dfrac{3}{2}b_{n+1}-\dfrac{3}{2}b_n=\dfrac{3}{2}\cdot 2^{n-1}-\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\cdots$ ⑦

⑥，⑦ から b_{n+1} を消去して b_n について整理すれば

$$b_n=2^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots \text{答}$$

【戦略 2】(2) について

【戦略 1】で得ることになる $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(-\dfrac{5}{2},\ 1,\ 1\right)$ という結果は，

$b_{n+2}-\dfrac{5}{2}b_{n+1}+b_n=0$ という【解 1】でいうところの ③′ に繋がります。

これは，(1) で考えた 3 項間漸化式と同じ形です。

初期条件が微妙に違いますから， $\begin{cases}\text{(1) の途中経過を微調整する}\\ \text{初期条件まで含めて (1) を利用する}\end{cases}$

という 2 路線考えられます。

この初期条件を観察してみると，

$$b_1=2 \qquad b_2=\frac{5}{2} \qquad b_3=\frac{17}{4}$$

$$\frac{1}{2}(=a_1) \qquad \frac{7}{4}(=a_2)$$

ですから，階差に目が行きます。

階差が意識できれば， $\begin{cases}b_{n+3}-\dfrac{5}{2}b_{n+2}+b_{n+1}=0\\ b_{n+2}-\dfrac{5}{2}b_{n+1}+b_n=0\end{cases}$ **と番号をずらして辺々操作という定番の処理に落ち着きます。**

そうなると，

$$(b_{n+3}-b_{n+2})-\frac{5}{2}(b_{n+2}-b_{n+1})+(b_{n+1}-b_n)=0$$

を得るため，$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと

$\begin{cases}c_{n+2}-\dfrac{5}{2}c_{n+1}+c_n=0\\ c_1=\dfrac{1}{2}\\ c_2=\dfrac{7}{4}\end{cases}$ **という (1) の結果が丸々利用できるでしょう。**

解答ではこれを逆算的に記述していきます。

【解 2】(2) について

与えられた漸化式は $b_{n+3}-\dfrac{7}{2}b_{n+2}+\dfrac{7}{2}b_{n+1}-b_n=0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ と同じことであり，

$$b_{n+3}-b_{n+2}=\frac{5}{2}(b_{n+2}-b_{n+1})-(b_{n+1}-b_n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる。

$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと $c_1=\dfrac{1}{2}$，$c_2=\dfrac{7}{4}$

$$c_{n+2}=\frac{5}{2}c_{n+1}-c_n$$

これは (1) と同じ漸化式なので，$c_n=2^{n-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

ゆえに，$b_{n+1}-b_n=2^{n-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k\\ &=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{2^{k-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\\ &=2+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\\ &=2^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots (*)\end{aligned}$$

(*) に $n=1$ を代入すると，$b_1=2^0+\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=2$ となり，(*) は $n=1$ のときも正しい結果を表す。

以上から，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$b_n=2^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots \text{答}$$

【総括】

(2) の 4 項間漸化式については，3 項間漸化式の「ココロ」をおさえていた人は対応できると思いますが，やり方のみを覚えていた人はアタフタするでしょう。

正直 【戦略 1】で $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ が 3 組求まった時点で勝ったと思うので，その勢いでいけば，【解 1】の流れが自然でしょう。

【解 2】については隙あらば (1) を利用してやろうという気持ちで目を光らせていないと中々気が付けないと思います。