

### 3頂点が動いたときの三角形の重心の存在範囲

△ABC に対し、辺 AB 上に点 P を、辺 BC 上に点 Q を、辺 CA 上に点 R を、頂点とは異なるようにとる。この3点がそれぞれの辺上を動くとき、この3点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。

< '06 京都大 >

#### 【戦略】

図形の問題で、動くものを扱うとなると、座標、もしくはベクトルの路線が考えられます。ここではベクトルの路線で考えてみます。

1つの始点、2つの基底(主役のベクトル)というセオリーに従い、 $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$ ,  $\overrightarrow{AC}=\vec{y}$  とおきます。

このとき与えられた条件を翻訳すると

$0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1$  として

$$\overrightarrow{AP}=p\vec{x}, \overrightarrow{AQ}=(1-q)\vec{x}+q\vec{y}, \overrightarrow{AR}=r\vec{y}$$

ということになります。

$$\triangle PQR \text{ の重心を } G \text{ とすると, } \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}$$

という式を得ます。

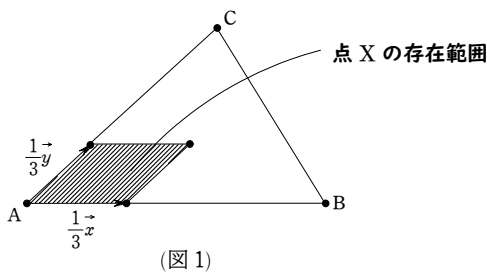
3点が独立に動くときを捉えるので、予選決勝法の考え方を疑い、点を固定することを考えます。

どの点を固定するかですが、P, Q, R のうち、一番うっとうしい Q に止まってもらいたいというのが多数の意見ではないかと思えます。

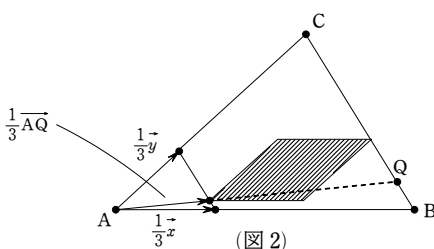
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+p\cdot\frac{1}{3}\vec{x}+r\cdot\frac{1}{3}\vec{y} \text{ と見て,}$$

$$\overrightarrow{AX}=p\cdot\frac{1}{3}\vec{x}+r\cdot\frac{1}{3}\vec{y}$$

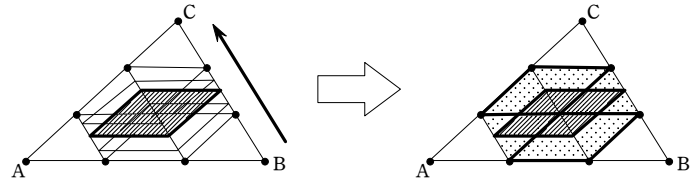
となる点 X の存在範囲を考えると、以下の(図1)のようになります。



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AX}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$  であることを考えると、Q を固定しているときの G の存在範囲は以下の(図2)のようになります。



ここで、固定していた点 Q を動かすと



のように平行四辺形が動いていき、その通過領域が今回の重心の存在範囲ということになります。

#### 【解答】

$$\overrightarrow{AB}=\vec{x}, \overrightarrow{AC}=\vec{y} \text{ とおく。}$$

$$\triangle ABC \text{ の重心を } G \text{ とすると, } \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}$$

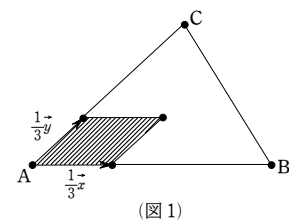
$$\overrightarrow{AP}=p\vec{x}, \overrightarrow{AR}=r\vec{y} \text{ (} 0 < p < 1, 0 < r < 1 \text{) と表せる。}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{p}{3}\vec{x} + \frac{r}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} \\ &= p\cdot\frac{1}{3}\vec{x} + r\cdot\frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} \end{aligned}$$

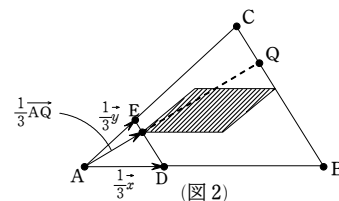
以下、Q を固定し、P, R のみを動かすことを考える。(すなわち、p, r を動かすことを考える。)

ここで、 $\overrightarrow{AX}=p\cdot\frac{1}{3}\vec{x}+r\cdot\frac{1}{3}\vec{y}$  で定まる点を X とする。

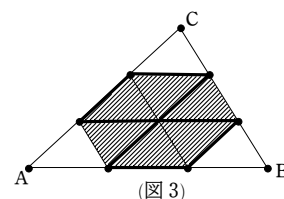
p, r を  $0 < p < 1, 0 < r < 1$  の範囲で独立に動かしたときの存在範囲は以下の(図1)の斜線部。



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AX}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$  より、Q を固定したときの G の存在範囲は以下の(図2)の斜線部分。



固定していた Q を線分 BC 上で動かすと、(図2)の平行四辺形の左下の頂点は(図2)の線分 DE 上を動くので、求める △ABC の重心 G の存在範囲は以下の(図3)の斜線部(ただし、境界線は除く)



【参考】斜交座標的に考えると

$0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1 \dots (*)$  として

$\overrightarrow{AP} = p\vec{x}, \overrightarrow{AR} = r\vec{y}, \overrightarrow{AQ} = q\vec{x} + (1-q)\vec{y}$  と表せますから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AR} \\ &= \frac{1}{3}p\vec{x} + \frac{1}{3}\{q\vec{x} + (1-q)\vec{y}\} + \frac{1}{3}r\vec{y} \\ &= \frac{p+q}{3}\vec{x} + \frac{1-q-r}{3}\vec{y} \end{aligned}$$

と、 $\triangle ABC$ の重心  $G$  についての位置ベクトルが得られます。

$$\begin{cases} X = \frac{p+q}{3} \dots \textcircled{1} \\ Y = \frac{1-q-r}{3} \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{とすると, } \overrightarrow{AG} = X\vec{x} + Y\vec{y} \text{ です。}$$

もちろんこの  $X, Y$  は自由には動けませんから、この  $X, Y$  を縛っている条件を考えていきます。

解答同様、まずは  $Q$  を固定し、 $P, R$  のみを動かします。

$P, R$  を動かした時を考えるということは、式的には  $p, r$  を消去することになります。

そこで、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  を  $p, r$  についての連立方程式と見て解くと、

$$p = 3X - q, \quad r = 3Y - 1 + q$$

を得ます。

これらを  $(*)$  に代入すれば

$$0 < 3X - q < 1, \quad 0 < 3Y - 1 + q < 1$$

となります。

気持ち的には

「下手くそな  $X, Y$  だと  $q$  が  $0 < q < 1$  として存在してくれないかも」という気持ちでいきます。

$0 < 3X - q < 1, \quad 0 < 3Y - 1 + q < 1$  を  $q$  について整理すると

$$\begin{cases} 3X - 1 < q < 3X \\ 1 - 3Y < q < 2 - 3Y \end{cases}$$

を得ることになります。

これと、元々の  $0 < q < 1$  と併せて考えると結局は

$$\begin{cases} 3X - 1 < q < 3X \\ 0 < q < 1 \end{cases} \text{ を満たす } q \text{ が存在するための条件} \begin{cases} 3X - 1 < 1 \\ 0 < 3X \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 3Y < q < 2 - 3Y \\ 0 < q < 1 \end{cases} \text{ を満たす } q \text{ が存在するための条件} \begin{cases} 1 - 3Y < 1 \\ 0 < 2 - 3Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X - 1 < q < 3X \\ 1 - 3Y < q < 2 - 3Y \end{cases} \text{ を満たす } q \text{ が存在するための条件} \begin{cases} 3X - 1 < 2 - 3Y \\ 1 - 3Y < 3X \end{cases}$$

を考えればよいことになります。

$$\begin{cases} 0 < X < \frac{2}{3} \\ 0 < Y < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} < X + Y < 1 \end{cases}$$

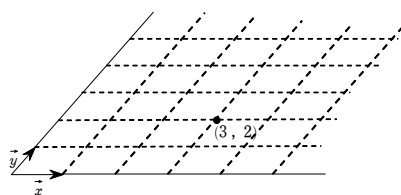
を得ます。

$\overrightarrow{AG} = X\vec{x} + Y\vec{y}$  が意味することは

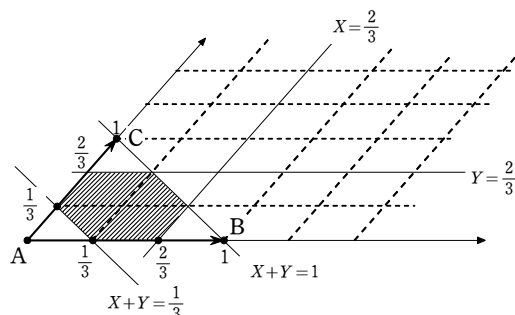
$\vec{x}, \vec{y}$  で張られる斜交座標において  $G$  の座標が  $(X, Y)$

ということになります。

例:  $3\vec{x} + 2\vec{y}$  だったら、 $(3, 2)$  に対応する。



この斜交座標上の点  $(X, Y)$  が、 $\begin{cases} 0 < X < \frac{2}{3} \\ 0 < Y < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} < X + Y < 1 \end{cases}$  を満たして動くとき



ということになり、【解答】と同じ結論が得られます。

### 【総括】

シンプルな問題設定ではありますが、ベクトルで攻めるのか、座標で攻めるのかという方針を決定するのに時間がかかったという人も多いでしょう。

存在領域を数式的に表現したいと思う人が多いと思いますが、そのために座標を設定していくと、泥沼にハマりかねません。

(【参考】のように、斜交座標であれば何とか処理しきれるといった感じですよ。)

3点が独立に動くことから、予選決勝法的な考え方で、ひとまず固定し、その後固定を外すという路線を睨み続けたいところです。

【補足】

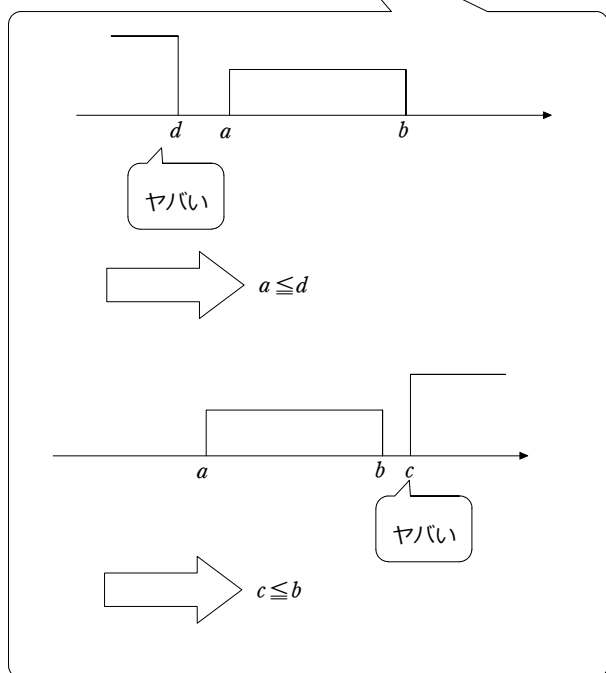
【参考】 中の処理で、

$a < b, c < d$  であるとき、 $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq x \leq d \end{cases}$  を満たす  $x$  が存在するための

必要十分条件は

$$a \leq d \text{ かつ } c \leq b$$

ということを使いました。



イメージ的には

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq x \leq d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq x \leq d \end{cases}$$

と覚えればよいでしょう。