２種類の数列を並べ替えてできる数列

　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=n^2+1$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=3n^2+3$ で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を $\{c_n\}$ とする。

　たとえば，初めの 3 項は，$c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=6$ となっている。このうち，$\{a_n\}$ から来る項は $c_1=a_1$，$c_2=a_2$，$\{b_n\}$ から来る項は $c_3=b_1$ である。

(1)　c_4，c_5，c_6 を求めよ。

(2)　a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しないことを示せ。

(3)　$\{c_n\}$ において，$\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを示せ。

＜ ’04 岡山大 改 ＞

【戦略】

(1)　**書き出して具体的に調べればいいだけです。**

(2)　b_n **は 3 の倍数です。**

一方，$a_n=n^2+1$ は $n=3k$，$3k\pm1$ と n を 3 で割った余りで分類して考えると

$$(3k)^2+1\equiv 1 \pmod 3$$
$$(3k\pm1)^2+1\equiv 2 \pmod 3$$

と，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k-1} はどれも 3 の倍数となりません。
(解答ではもう少し k の範囲などに気を遣って記述します)

(3)　**$\{b_n\}$ から連続して並ばないという否定的な命題の証明ということで背理法という路線で考えたいところです。**

そこで，$\{b_n\}$ から連続して並ぶことがあると仮定します。

$\{b_n\}$ から連続して並ぶということを数式的にどのように言うかですが

$a_M<b_N<b_{N+1}<a_{M+1}$ という大小関係となっているということです。

このような大小関係になっていると仮定します。

$b_N<b_{N+1}$ は確実に成り立ちますから，結局は

$$\begin{cases} a_M<b_N \\ b_{N+1}<a_{M+1} \end{cases}\text{，すなわち}\begin{cases} M^2+1<3N^2+3 \\ 3(N+1)^2+3<(M+1)^2+1 \end{cases}$$

が成り立っているときを考えることになります。

これを整理すれば，$\begin{cases} M^2-3N^2-2<0 \\ -M^2+3N^2-2M+6N+4<0 \end{cases}$ ということになります。

M^2，N^2 という 2 次の項を消去しにいきたくなりますから，辺々加えると

$-2M+6N+2<0$，すなわち $3N+1<M$ を得ます。

$M^2+1<3N^2+3$ より，$(3N+1)^2+1<M^2+1<3N^2+3$

ということになり，N の不等式 $6N(N+1)<1$ を得ますが明らかにこれを満たす自然数 N は存在せず，矛盾します。

【解答】

(1)　$a_1=2$，$a_2=5$，$a_3=10$，$a_4=17$，$a_5=26$，…
　　$b_1=6$，$b_2=15$，$b_3=30$，$b_4=51$，$b_6=78$，…

　これを小さい方から並べると

$$2,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 17,\ 26,\ 30,\ \cdots$$

　この数列が $\{c_n\}$ であり，$c_4=10$，$c_5=15$，$c_6=17$ …答

(2)　$n=3k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3k}&=(3k)^2+1 \\ &=9k^2+1 \\ &\equiv 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

　$n=3k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3k+1}&=(3k+1)^2+1 \\ &=9k^2+6k+2 \\ &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}$$

　$n=3k+2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3k+2}&=(3k+2)^2+1 \\ &=9k^2+6k+5 \\ &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}$$

　これより，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，a_n は 3 の倍数とならない。

　一方，$b_n=3(n^2+1)$ であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，b_n は 3 の倍数である。

　したがって，a_n は数列 $\{b_n\}$ のどの項とも一致しない。

(3)　数列 $\{c_n\}$ の項として連続して b_N，b_{N+1} が入ると仮定する。

　このとき，$a_M<b_N<b_{N+1}<a_{M+1}$ となるような自然数 M，N が存在する。

　$a_M<b_N$ より，$M^2+1<3N^2+3$ …①，すなわち

$$M^2-3N^2-2<0 \cdots ②$$

　$b_{N+1}<a_{M+1}$ より $3(N+1)^2+3<(M+1)^2+1$，すなわち

$$-M^2+3N^2-2M+6N+4<0 \cdots ③$$

　②＋③ より，$-2M+6N+2<0$，すなわち，$3N+1<M$ …④

　①，④ より $(3N+1)^2+1<3N^2+3$ で，これを整理すると

　$6N(N+1)<1$ となるが，N は自然数より $6N(N+1)\geqq 6\cdot1\cdot2=12$ であるため，矛盾する。

　以上から，数列 $\{c_n\}$ の項として連続して数列 $\{b_n\}$ の項が並ぶことはない。

【総括】

まずは $\{c_n\}$ の項がどのように作られていくかを実感するために，手を動かして実験してみることが大切です。

⑵ は方針面で整数問題の基本である「余りで分類」という態度で倒すのですが，その方針をとるためには観察力が必要でしょう。

⑶ については背理法という路線をとることもそうですが，その後も

$\{b_n\}$ から連続して並ぶということを数式的にどのように言うか

どのような形で矛盾するのか

という点で，即座に倒れてはくれませんでした。

特に，どのような形で矛盾するのかについては，最初の実験などを通じて

a_n は歩幅が小さく，b_n は歩幅が大きい

というイメージがあれば，小刻みに増えていく a_n が $b_{\bigcirc}$ ～ $b_{\bigcirc+1}$ の間に入ってきてしまうという「幅の問題」(不等式的な問題)で矛盾するであろうことが予測できますが，そのあたりの最終的なシナリオを見通せたかどうかは差がつく要素だと思います。