(1)　n 桁の自然数のうち，各位の数字がすべて 1 と異なるものの個数を求めよ。

(2)　自然数の逆数からなる級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\cdots$$

から，分母に数字 1 が現れる項をすべて除いて得られる級数

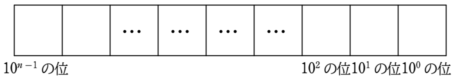
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\cdots$$

の和は 40 を超えないことを示せ。

＜ ’00 岩手大 ＞

【解答】

(1)



$n \geqq 2$ のとき

10^{n-1} の位 (最高位) の数字の選び方は 0，1 を除く 8 通り

$10^{n-2} \sim 10^0$ の位の数字の選び方は 1 を除く 9 通り

ゆえに，$8 \cdot 9^{n-1}$ 【個】

$n=1$ のとき 1 桁の正の整数で題意を満たすのは 2，3，…，9 の 8 個

以上から，$n=1$，2，… に対して $8 \cdot 9^{n-1}$ 【個】… 答

(2)　題意の級数を S とし，S に現れる項を分母の整数の桁数によって区切り，分母の整数が m 桁である集合を第 m 群と呼ぶ。

第 1 群：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{9}$

第 2 群：$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{22}$，……

第 3 群：$\frac{1}{200}$，$\frac{1}{202}$，……

⋮

⋮

第 m 群：$\frac{1}{2\cdot 10^{m-1}}$，$\frac{1}{2\cdot 10^{m-1}+2}$，……

⋮

第 m 群の和を S_m とすると

$$S=\sum_{m=1}^{\infty} S_m \left(=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} S_m\right)$$

ここで，第 m 群の先頭の数である $\frac{1}{2\cdot 10^{m-1}}$ が第 m 群の最大値であること，及び，第 m 群に含まれる項の個数は $8\cdot 9^{m-1}$ 個であることから

$$S_m<\frac{1}{2\cdot 10^{m-1}}\cdot(8\cdot 9^{m-1})=4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

以上から

$$S<\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}40\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right\}$$

$$=40$$

であり，題意は示された。