

調和級数とその応用

正の整数に関する条件

(*) 10進法で表したときに、どの位にも数字9が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) k を正の整数とすると、 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件(*)を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき、 a_k を k の式で表せ。
- (2) 正の整数 n に対して、

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n \text{ が条件 (*) を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件 (*) を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき、すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

< '21 東京工業大 >