正の整数に関する条件

(*)　10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (*) を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2)　正の整数 n に対して，

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (n\text{ が条件 }(*)\text{ を満たすとき})\\ 0 & (n\text{ が条件 }(*)\text{ を満たさないとき})\end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n<80$$

＜ ’21 東京工業大 ＞

【戦略】

(1)　基本的な場合の数の問題であり，最高位の数のみ 0 を置くことが許されないことに注意します。

(2)　要するに

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\\ &+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{88}\\ &+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{108}+\frac{1}{110}+\cdots+\frac{1}{888}\\ &\qquad\vdots\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

と，数字 9 が現れないものの逆数を全て足していくことになります。
（$\sum$ の範囲的には分母が k 桁の部分まで足すことになります。）

そこで，分母が m 桁となるようなものごとに区切って，第 m 群と呼びます。

つまり，群数列のような考え方で進めていきます。

今回の和は直接計算できませんから，等号を繋いでいくことは諦めて不等号を繋いでいく（評価する）という方向を見据えます。

「大きくしよう，大きくしよう」と気持ちがあれば，各群の先頭が各群で一番大きいので，各群の項を全て先頭に揃えてしまうことが考えられます。(個数は (1) から a_m 個だと分かるでしょう)

＜イメージ図＞

第 m 群： $\dfrac{1}{10^{m-1}}$，$\dfrac{1}{10^{m-1}+1}$，……

$\Rightarrow$ $\overbrace{\dfrac{1}{10^{m-1}},\ \dfrac{1}{10^{m-1}},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{10^{m-1}}}^{a_m\text{ 個}}$

【解答】

(1)　a_k とは k 桁の正の整数で数字 9 を用いないものの個数。

		…	…	…	…			
10^{k-1} の位						10^2 の位	10^1 の位	10^0 の位

$k\geqq 2$ のとき

10^{k-1} の位 (最高位) の数字の選び方は 0，9 を除く 8 通り

10^{k-2} ～ 10^0 の位の数字の選び方は 9 を除く 9 通り

ゆえに，$a_k=8\cdot 9^{k-1}$

$k=1$ のとき 1 桁の正の整数で (*) を満たすのは 1，2，…，8 の 8 個

以上から，$k=1$，2，… に対して $a_k=8\cdot 9^{k-1}$ … 答

(2)　数列 $\{b_n\}$ を分母の整数の桁数によって区切り，分母の整数が m 桁である集合を第 m 群と呼ぶ。

第 1 群：$\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，…，$\dfrac{1}{8}$

第 2 群：$\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{1}{11}$，…，$\dfrac{1}{18}$，$\dfrac{1}{20}$，…，$\dfrac{1}{88}$

第 3 群：$\dfrac{1}{100}$，$\dfrac{1}{101}$，……，$\dfrac{1}{888}$

⋮
⋮

第 m 群：$\dfrac{1}{10^{m-1}}$，$\dfrac{1}{10^{m-1}+1}$，……

⋮
⋮

第 k 群：$\dfrac{1}{10^{k-1}}$，$\dfrac{1}{10^{k-1}+1}$，……

第 $k+1$ 群：$\dfrac{1}{10^k}$，$\dfrac{1}{10^k+1}$，……

第 m 群の和を S_m とすると

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n=\sum_{m=1}^{k} S_m$$

ここで，第 m 群の先頭の数である $\dfrac{1}{10^{m-1}}$ が第 m 群の最大値であること，及び，第 m 群に含まれる項の個数は a_m（$=8\cdot 9^{m-1}$）個であることから

$$S_m<\frac{1}{10^{m-1}}\cdot(8\cdot 9^{m-1})=8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

以上から

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < \sum_{m=1}^{k} 8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$$

$$=8\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}}$$

$$=80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}$$

$$<80$$

であり，題意は示された。

【総括】

(2) は桁数によって区切って考える「群数列」としての捉え方をしないと中々難しいでしょう。

各群の先頭に合わせて評価する（不等式を繋ぐ）部分も，「評価」というものに手慣れていないと中々出来ないと思います。

今回の

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\cdots$$

は 80 を超えないということになります。

ちなみにただの自然数の逆数の和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$$

を調和級数といい，これは発散します。

（$y=\frac{1}{x}$ のグラフを考えれば，$\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$ ということが言えますから

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\left(=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\right)$ となり，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\Big[\log x\Big]_1^{n+1}$

すなわち，$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$ ということになり，$n\to\infty$ を考えることにより，調和級数が発散することが言えます。）

このことから，今回この調和級数から除いた

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\cdots+\frac{1}{89}+\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{109}+\cdots\cdots$$

というものが発散することを意味します。

なぜなら

$T=\frac{1}{9}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\cdots+\frac{1}{89}+\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{109}+\cdots\cdots$ とおくと

もし，$T=\alpha$ という有限の値に収束してしまったら

(調和級数)$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+T=80+\alpha$（$=$有限確定値）となってしまい，調和級数が発散することに矛盾してしまうことになるからです。