立体射影に関する点の軌跡

長さが2の線分 NS を直径とする球面 K がある。点 S において球面 K に接する平面の上で，S を中心とする半径2の四分円（円周の $\dfrac{1}{4}$ の長さをもつ円弧）$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と線分 AB をあわせて得られる曲線上を，点 P が1周する。このとき，線分 NP と球面 K との交点 Q の描く曲線の長さを求めよ。

＜ ’80 東京大 ＞

【戦略】

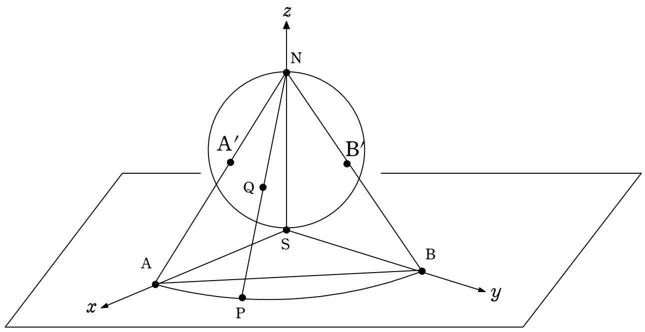
パッと見は空間図形の問題で，とりあえず状況把握しないとなぁという感じです。

あとは幾何的に処理できるのか，座標を導入するのか，ベクトルを持ち出すのか，などざっくり大まかな事を考えます。

とりあえず状況把握からスタートして，イメージできそうなら幾何的に，ちょっとよく分からんなと思ったら式に教えてもらうつもりで座標なりベクトルなりを持ち出すということでやっていきましょう。

図を書いてみると，点 Q の軌跡は円弧っぽいですが，掴めそうで掴めないので，詳しくは式に教えてもらいましょう。

絵的には S を原点にとって座標設定するのが自然だと思います。



目標としては，Q の軌跡を把握することです。

Q は $\begin{cases}\text{直線 NP 上} & \cdots ① \\ \text{球面 } K \text{ 上} & \cdots ②\end{cases}$ という2つの図形上の点です。

3次元空間座標において直線は直交座標表示よりも，ベクトル方程式の方が扱いやすいため，① については $\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SN}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ という u をパラメーターにもつベクトル方程式を用いて翻訳します。

これにより，Q の座標が u を用いて表せます。

球 K については $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ という直交座標表示としての式が与えられていますから，先ほど得られた Q の座標を代入すればよいでしょう。

このとき u はむやみやたらな値ではなく，Q が球面 K の上に乗るような

「うまい倍率」

という意識で $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に代入し，整理していきます。

【解答】

s，t を $0\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数として

S$(0,0,0)$，N$(0,0,2)$，A$(2,0,0)$，B$(0,2,0)$，P$(s,t,0)$

と設定しても一般性を失わない。

球面 K の方程式は $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

N，Q，P は同一直線上にあります。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{SN}}+\overrightarrow{\mathrm{NQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{SN}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{NP}}\quad(u\text{ は }0<u<1\text{ を満たす実数})\\&=\overrightarrow{\mathrm{SN}}+u\left(\overrightarrow{\mathrm{SP}}-\overrightarrow{\mathrm{SN}}\right)\\&=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{SN}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{SP}}\\&=(1-u)\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}us\\ut\\2-2u\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Q が K 上に乗っていることを翻訳するためには Q の座標が必要です。
空間座標においてはベクトル経由で座標を求めるという作業は染みついていてほしい感覚です。

これより，Q$(us,\,ut,\,2-2u)$ と表せる。

点 Q は球面 K 上なので，

u は無茶苦茶な値ではないですね。球面 K にうまく乗っかるように選ぶ特別な値なので，「u の方程式」という視点で見てくださいね。

$$(us)^2+(ut)^2+\{(2-2u)-1\}^2=1$$

これを整理すると，$(s^2+t^2)u^2+(1-2u)^2=1\ \cdots(*)$

(i)　P が $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上を動くとき

s，t は $s^2+t^2=4$ を満たすので，$(*)$ から $4u^2+(1-2u)^2=1$

整理すると，$4u(2u-1)=0$

$0<u<1$ より，$u=\dfrac{1}{2}$

このとき，Q$\left(\dfrac{1}{2}s,\,\dfrac{1}{2}t,\,1\right)$ であり，Q$(X,\,Y,\,Z)$ とおくと，

$$\begin{cases}X=\dfrac{1}{2}s\\[2mm] Y=\dfrac{1}{2}t\\[2mm] Z=1\end{cases}$$

s，t が $s^2+t^2=4$ を満たしながら動くとき，$(2X)^2+(2Y)^2=4$ すなわち，$X^2+Y^2=1$ なので，Q は平面 $z=1$ 上で半径1の四分円を描く。（$0\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 2$ より，$0\leqq X\leqq 1$，$0\leqq Y\leqq 1$）

ゆえに，このときの Q の軌跡の長さを L_1 とすると，

$$L_1=2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

(ii)　Pが線分 AB 上を動くとき

s，t は $s+t=2$ を満たす。

Q (X, Y, Z) とおくと

$$\begin{cases} X=us \\ Y=ut \\ Z=2-2u \end{cases}$$

$s=\dfrac{X}{u}$，$t=\dfrac{Y}{u}$ より $s+t=2$ に代入して

$\dfrac{X}{u}+\dfrac{Y}{u}=2$，すなわち $X+Y=2u$

$Z=2-(X+Y)$ より，$X+Y+Z=2$ を得る。

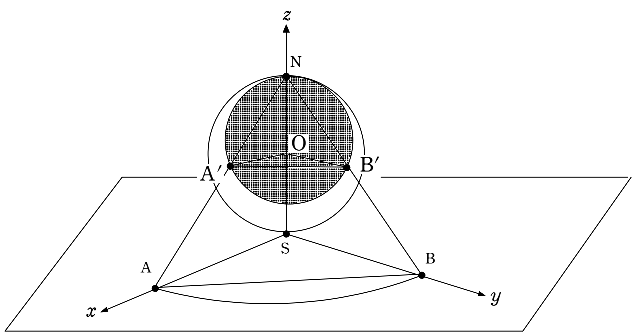
これより Q (X, Y, Z) は平面 $x+y+z=2$ 上にあることが分かる。

一方，Q (X, Y, Z) は，球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 上にもある点である。

よって，Q の軌跡は

球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ と平面 $x+y+z=2$

の交線であり，それは円である。((図 1) 参照)



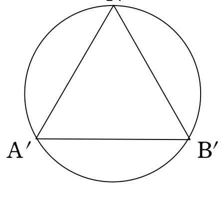
(図 1)

(図 1) の三角形 NA′B′ の外接円の 劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$ が Q の軌跡であり

球面 K の中心を O とすると，$\mathrm{OA'}=\mathrm{OB'}=\mathrm{ON}=1$

さらに，A′，B′ はそれぞれ線分 AN，BN の中点であるので

△OA′N，△OB′N，△OA′B′ は全て合同な直角二等辺三角形



よって，$\mathrm{NA'}=\mathrm{NB'}=\mathrm{A'B'}=\sqrt{2}$ なので

この外接円の半径を R とすると正弦定理から

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R$$

これより，$R=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ を得る。

ゆえに，このときの Q の軌跡の長さを L_2 とすると，

$$L_2=2\pi R\times\frac{1}{3}=2\pi\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi$$

以上から，求める Q の軌跡の長さを L とすると

$$\begin{aligned} L&=L_1+L_2 \\ &=\frac{\pi}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi \\ &=\frac{9+4\sqrt{6}}{18}\pi \ \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

イメージは N が北極，S が南極という地球という感じですね。
（アルファベットの使い方的に出題側もそんなイメージで出題していると思います。）

２次元の座標では直線は $y=px+q$，$ax+by+c=0$ などという直交座標表示（直交座標 (x, y) の間にある関係式で図形を表現する）が容易なのですが，3 次元においては，直線の直交座標表示はあるにはありますが面倒です。

なので，必然的に直交座標の方程式ではなく，ベクトル方程式を用いて表現することになるということは，ある程度の常識にしておきたいところです。

なお，xy 平面上の点 X に対して，直線 NX と球 K の交点 X′ を対応させるというようにみれば，今回の xy 平面上の点と，球 K 上の N 以外の点は 1 対 1 に対応します。

専門的には今回の球面 K は「リーマン球」と呼ばれる球です。

xy 平面を複素数平面に見立てて，複素数平面上の点 z と，K 上の点 z' を対応させるという複素数平面の拡張的な話に繋がっていきます。