数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める。

$$c_n=(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1)　c_n と c_{n+2} の関係を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた極限値を c とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c}{c_n-c}$ を求めよ。

＜ '00 京都大 ＞

【戦略】

積分漸化式のほとんどは部分積分を用いて作成します。
（例外は tan についての積分漸化式）

本問もその例に漏れず，部分積分経由で積分漸化式を作成していきます。

2 回部分積分を使わなければいけない分，計算ミスに気をつけましょう。

(1) で間違ったらそれ以降が絶望になります。

(2) は少し卑怯なのですが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ が「もし α に収束したら」という前提で見通しを立ててみます。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ とすると，(1) の漸化式から $c_n+1=-\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$ ですから $\alpha+1=0\cdot\alpha$ ということで，$\alpha=-1$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=-1$ という見通しが立ちます。

もちろんこれはあくまで「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ がもし 収束したら」という前提なので，これを全面に押し出すことはできません。

ただ，$0\leqq|c_n+1|\leqq$ ○ という形で上から押さえて，はさみうちの原理から仕留める方向性は見えてきます。

(3) も見通しはすぐに立ちます。分母と分子の振るまいは同じですから，1 に収束することは目に見えていますが，それで済ましてしまうことは許されないでしょう。
(1) の漸化式を用いて，$\dfrac{0}{0}$ という不定形を作っている部分の解消を狙っていきます。

不定形の根源は $c_{\bigcirc}+1$ という部分なので，(2) 同様，(1) の漸化式を $c_n+1=$ という形で見ていきます。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
c_{n+2}&=(n+3)\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx\\
&=(n+3)\left\{\left[\frac{x^{n+2}}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1-\int_0^1(n+2)x^{n+1}\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right\}\\
&=(n+3)\left\{-\frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx\right\}\\
&=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\left\{\left[-\frac{x^{n+1}}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1+\int_0^1(n+1)x^n\cdot\frac{1}{\pi}\cos\pi x\,dx\right\}\\
&=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\left\{\frac{1}{\pi}+\frac{n+1}{\pi}\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\right\}\\
&=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(1+c_n)\ \cdots 答
\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果から $c_n+1=-\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$

ゆえに $|c_n+1|=\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}|c_{n+2}|\ \cdots$ ①

ここで，

> **注意**
> 一般に
> $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,dx$
> が成立します。

$$|c_{n+2}|=(n+3)\left|\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx\right|\leqq(n+3)\int_0^1|x^{n+2}\cos\pi x|\,dx$$

積分区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，$0\leqq\pi x\leqq\pi$ より，$-1\leqq\cos\pi x\leqq 1$

したがって，
$$\begin{aligned}
(n+3)\int_0^1|x^{n+2}\cos\pi x|\,dx&\leqq(n+3)\int_0^1|x^{n+2}|\,dx\\
&=(n+3)\int_0^1 x^{n+2}\,dx\\
&=1
\end{aligned}$$

よって，$|c_{n+2}|\leqq 1$

① より，$0\leqq|c_n+1|\leqq\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}=0$

はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|c_n+1|=0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=-1\ \cdots$ 答

(3)　(2) より $c=-1$ で，$c_n-c=c_n+1$ なので，$\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n-c}=\dfrac{c_{n+1}+1}{c_n+1}$

ここで，(1) から，$c_n+1=-\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$ なので

$$\frac{c_{n+1}+1}{c_n+1}=\frac{-\dfrac{\pi^2}{(n+4)(n+3)}c_{n+3}}{-\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}}$$

$$=\frac{(n+2)c_{n+3}}{(n+4)c_{n+2}}$$

$$=\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)c_{n+3}}{\left(1+\dfrac{4}{n}\right)c_{n+2}}$$

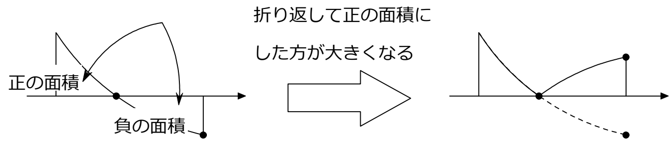
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c}{c_n-c}=\frac{1\cdot(-1)}{1\cdot(-1)}=1$ … 答

【総括】

(1) は部分積分からの積分漸化式という典型的な問題です。難関大受験生であれば試験場においてこれを落とすことは許されないでしょう。

(2) の評価は【戦略】でも述べたように，見通しを立てていないと中々前に進まないことでしょう。
もしこの段階で躓いてしまった場合でも (3) はある程度はできるはずですから，部分点を少しでも稼ぐ態度で臨みたいところです。

注意 で述べたのは「積分の三角不等式」と呼ばれるものです。
積分が「有向面積 (向きのある符号付き面積) 」であることを加味すれば当然です。



(3) も感覚的には 1 に収束するだろう事は想像がつきますが，結果を見通していても案外苦戦する人も出てくるかもしれません。

不定形の根源を叩くことを忘れずに，今回悪さをしている c_n+1 に目を向けて，(1) を利用できたかが分かれ道でしょう。