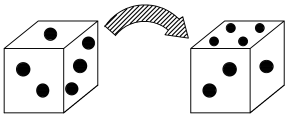
　さいころが机の上に 1 の面を上にして置かれている。

　底面の目は 6 で，側面の目は 2，3，4，5 である。



　このさいころを，机に接する 4 本の辺 (稜) のいずれかを回転軸として 1 回だけ横に倒す操作を “1 回転がす” ということにする。

最初の状態から 1 回転がした結果，上面は 2，3，4，5 のどれかになる。

いま，どの辺を軸として転がすかは無作為 (等確率) であるとし，最初の状態から n 回転がしたとき

1 の面が上面に来る確率を a_n

1 の面が側面に来る確率を b_n

1 の面が底面に来る確率を c_n

とする。

(1) a_n，b_n，c_n を a_{n-1}，b_{n-1}，c_{n-1} で表せ。

(2) a_n，及び $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

＜ ’07 お茶の水女子大 改 ＞

【戦略】

(1) **$n-1$ 回目の状態と n 回目の状態を丁寧に追っていき，状態推移を捉えていきます。**

上面や底面に 1 があると，次の回は確実に 1 は側面にいきます。

(2) **(1) で立てた** $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1} \end{cases}$

という連立漸化式を解いていきます。

連立漸化式の基本は文字消去ですから，文字消去を狙っていきます。

確率漸化式特有の条件式 $a_n + b_n + c_n = 1$ であることを活用したいと思えれば

$b_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1}$ **及び，** $a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = 1$ **に注目して**

$b_n = (1 - b_{n-1}) + \dfrac{1}{2}b_{n-1}$，**すなわち** $b_n = -\dfrac{1}{2}b_{n-1} + 1$ **を得て，**

基本的な 2 項間漸化式に落ち着きます。

これを解いて，b_n を出し，番号を下げて b_{n-1} を出し， $a_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1}$

にぶち込んでもいいのですが，最終的に求めるものが a_n であることを考え

$b_{n-1} = 4a_n$ **とし，** $4a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\cdot 4a_n + 1$ **とする**

という路線で処理します。

【解答】

(1) 最初の状態を 0 回目の操作後とみなし，$a_0 = 1$，$b_0 = 0$，$c_0 = 0$ と解釈すれば，$n = 0$，1，2，… に対して $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を考えることができる。

$n = 0$，1，2，… に対して，n 回転がしたとき

1 の面が上面に来る状態を A_n

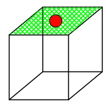
1 の面が側面に来る状態を B_n

1 の面が底面に来る状態を C_n

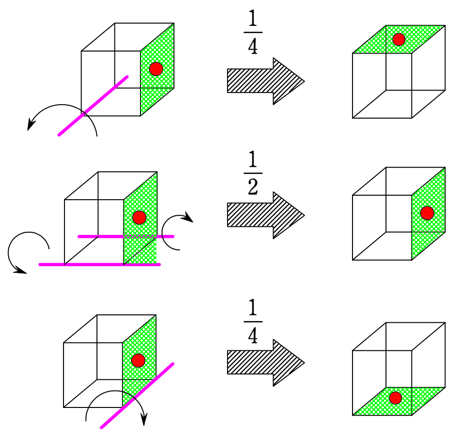
とする。

$n = 1$，2，3，… に対して

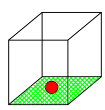
状態 A_{n-1} からは，どの辺を選んでも状態 B_n となる。



状態 B_{n-1} からは $\begin{cases} \text{確率 } \dfrac{1}{4} \text{ で状態 } A_n \\ \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で状態 } B_n \\ \text{確率 } \dfrac{1}{4} \text{ で状態 } C_n \end{cases}$ となる。



状態 C_{n-1} からは，どの辺を選んでも状態 B_n となる。



以上から，$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \cdots \text{答} \\ c_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1} & \cdots ① \\ b_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} & \cdots ② \quad (n=1,2,\cdots) \\ c_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1} & \cdots ③ \end{cases}$ に対して

$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$ $(n=1,2,\cdots)$ であることから，② は

$$\begin{aligned} b_n &= (1-b_{n-1})+\frac{1}{2}b_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2}b_{n-1}+1 \quad (n=1,2,\cdots) \cdots ④ \end{aligned}$$

① より，$b_{n-1}=4a_n \cdots ①'$ であるため，$b_n=4a_{n+1} \cdots ①''$

①′，①″ を ④ に代入すると

せっかく a_0 と拡張したのですが，$n=1,2,\cdots$ のときしかこの漸化式は成立しません

$4a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\cdot 4a_n+1$ であるため，

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4} \quad (n=1,2,\cdots)$$

これは，$a_{n+1}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{1}{6}\right)$ と変形できるため

$$\begin{aligned} a_n-\frac{1}{6} &= \left(a_1-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

ゆえに，$n=1,2,\cdots$ に対して

$$a_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \cdots 答$$

さらに，$\lim_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{6} \cdots$ 答

【総括】

状態推移を追っていき，確率漸化式を立てた後は，数列の漸化式の問題です。

今回は，$a_n+b_n+c_n=1$ となるタイプだったので，これをうまく活用して処理していきました。
（場数を踏むと，この活用は定番の処理だという感想がもてるようになってきます。）

本問で注意すべきは漸化式の定義域であり，①′ である $b_{n-1}=4a_n$ は

$$b_0=4a_1,\ b_1=4a_2,\ b_2=4a_3,\ \cdots\cdots$$

といったように，$n=1,2,3,\cdots$ に対して定義できるものです。

それを ④ に代入して得られる $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{4}$ という漸化式についても $n=1,2,\cdots$ が定義域と言うことになります。

なお，$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$ に気が付かなかった場合，
①，③ より，$a_{n-1}=\dfrac{1}{4}b_{n-2}$，$c_{n-1}=\dfrac{1}{4}b_{n-2}$ であり，② に代入することで

$$b_n=\frac{1}{4}b_{n-2}+\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{4}b_{n-2}，すなわち\ b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-2}$$

と，a_{n-1}，c_{n-1} を消去して，$b_{\square}$ についての 3 項間漸化式で処理することもできます。

連立漸化式の基本
文字消去
という考え方です。