　1が書かれたカードが2枚，2が書かれたカードが2枚，…，n が書かれたカードが2枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後，1枚ずつ左から順に並べる。このとき，カードに書かれている数の列を a_1，a_2，…，a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1) $X=1$ となる確率を求めよ。

(2) $X=n$ となる確率を求めよ。

(3) m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。

＜ ’03 一橋大 ＞

【戦略】

確率において守るべき原則は

①：分母と分子は同じ概念で数える。

②：全事象は同様に確からしいようにする。

という2点です。

逆に言えば，この2点さえ守れば，基本的にはどのように考えても自由です。

例えば，(1) は $X=1$ とは $a_1 \geqq a_2$ となる現象です。

a_3 以降のことなど知ったこっちゃありません。

だったら，n 枚も取り出す必要は無く，2枚取り出した段階のこととして考えても問題ありませんね。
(問題文で n 枚取り出すと書いてあっても，題意に影響を与えない部分など無視して2枚取り出した段階を考えても問題ないわけです。)

そして，今回は同じカードが2枚ずつあります。

見た目が同じカードでも，「確率では全てのものを区別せよ」という言葉があります。

極端な話

「袋の中に白玉が99個と赤玉が1個の合計100個の玉が入っている。この袋の中から1個玉を取り出したとき，赤玉を取り出す確率を求めよ。」

と言われたら，$\dfrac{1}{100}$ と即座に答えるでしょう。

まさか，99個の白玉は同じだから，赤を取るか白を取るかの $\dfrac{1}{2}$ とは答えませんよね。

$\dfrac{1}{100}$ と答えたあなたは無意識に99個の白玉は違うものだと区別しているのです。

これこそがまさに②のことで，$\dfrac{}{100}$ の100通りは起こりやすさが同じ(同様に確からしい)なのですが，$\dfrac{}{2}$ の2通りは起こりやすさが違うのです(圧倒的に白が出やすい)

全事象に同様に確からしさを保証するために「確率では全てのものを区別する」のです。

【解答】

(1)　2枚取り出した段階で考える。

全事象は ${}_{2n}\mathrm{P}_2$ 通りで，そのうち $a_1 \geqq a_2$ となる場合の数は

$$\begin{cases} 2^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 & (a_1 > a_2 \text{ となる場合の数}) \\ n \cdot 2 & (a_1 = a_2 \text{ となる場合の数}) \end{cases}$$

つまり $X=1$ となる場合の数は $4 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} + 2n = 2n^2$ 通り

ゆえに求める確率は $\dfrac{2n^2}{2n(2n-1)} = \dfrac{n}{2n-1}$ …答

(2) n 枚取り出した段階で，$a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n$ となれば $a_n \geqq a_{n+1}$ は必ず起こるので

$$a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n$$

となる確率を求めればよい。

$a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n$ となる場合の数は

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots\cdots,\ a_n = n$$

でカードは各々2種類あるため，求める確率は

$$\frac{2^n}{{}_{2n}\mathrm{P}_n} = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \ \cdots \text{答}$$

(3)　m 枚取り出した段階で，$a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m$ となれば m 以上の自然数で減少に転じる瞬間が必ずあり，$X \geqq m$ となる。

よって $a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m$ となる確率を求める。

全事象は ${}_{2n}\mathrm{P}_m$ 通り

このうち $a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m$ となる場合の数を求める。

数字の選び方は ${}_n\mathrm{C}_m$ 通りで，カードは各々2種類あるので，
$2^m \cdot {}_n\mathrm{C}_m$ 通りが $a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_m$ となる場合の数である。

求める確率は

$$\frac{2^m \cdot {}_n\mathrm{C}_m}{{}_{2n}\mathrm{P}_m} = \frac{2^m \cdot \dfrac{n!}{m!(n-m)!}}{(2n)(2n-1)\cdots(2n-m+1)} = \frac{2^m \cdot (2n-m)!\,n!}{(2n)!\,m!\,(n-m)!} \ \cdots \text{答}$$

【戦略2】(1) について

余事象を捉えてもよいでしょう。
等号が入らない分数えやすくなります。

【解2】(1) について

$a_1 < a_2$ となる並べ方は数字の決め方が ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り，カードは各々2種類あるため，$2^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2$ 通り。

余事象を考え，求める確率は $1 - \dfrac{2^2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2}{2n(2n-1)} = \dfrac{n}{2n-1}$ …答

【総括】

確率の原則を確認する上で非常にいい問題です。

加えて「$X=$○ とは」と題意をより分かりやすく，かみ砕くことが求められました。

(3) は分かりやすく言うと，$X \geqq m$ という現象は ”人間の死” に例えられます。(不謹慎な例えで申し訳ありませんが)

人はいつか必ず死にます。それと同じで，$a_m \geqq a_{m+1}$ という現象もいつか必ず起きる現象です。

m 歳以上で死ぬということは，m 歳までは生きていることになります。

例えば 49 歳まで生きていれば，50 歳以上で死ぬことになります。

つまり，a_m までは減少が起きなければ (m 歳まで生きていれば)，それ以降で減少が起こる (m 歳以上で死ぬ) ということになるのです。