楕円 C_1 : $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 C_2 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。
C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば，C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

＜ '07 北海道大 ＞

【戦略】

まず，$\alpha>0$，$\beta>0$，$a>0$，$b>0$ で考えれば十分です。

また，C_2 が横に広がる双曲線なので，焦点は x 軸上にあることから，楕円の焦点も x 軸上にあることになり，$\alpha>\beta$ として考えることになります。

C_1 の焦点 $\left(\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,,\ 0\right)$ と C_2 の焦点 $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2}\,,\ 0\right)$ が一致しているという条件から

$$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2 \cdots ①$$

を得ることになります。

交点を先に求めて汚い形で接線を作りたくはありませんので，おいてしまいます。

次に C_1，C_2 の交点を $\mathrm{P}(p\,,\ q)$ とし，P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると

$$\ell_1 : \frac{px}{\alpha^2}+\frac{qy}{\beta^2}=1\,,\quad \ell_2 : \frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

ということになります。

今，交点は座標軸上にはなく，ℓ_1，ℓ_2 には傾きが存在してくれるため ℓ_1，ℓ_2 の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とすると

$$m_1=-\frac{\beta^2p}{\alpha^2q}\ ,\ m_2=\frac{b^2p}{a^2q}$$

であり，$m_1m_2=-\dfrac{p^2}{q^2}\left(\dfrac{b\beta}{a\alpha}\right)^2$ が得られることになります。

目標はもちろん，$m_1m_2=-1$ です。

p，q **が** $\begin{cases}\dfrac{p^2}{\alpha^2}+\dfrac{q^2}{\beta^2}=1\\[2mm] \dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=1\end{cases}$ **を満たしている。**

α，β，a，b **が ① を満たしている。**

という手持ちの条件を元に目標を目指します。

$$m_1m_2=\boxed{-\frac{p^2}{q^2}}\left(\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^2$$

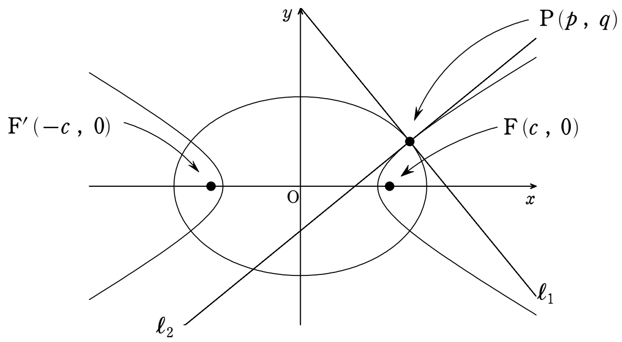
この部分を処理するために
p^2，q^2 の連立方程式と見ます

すると，$p^2=\dfrac{\alpha^2a^2(\beta^2+b^2)}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}$，$q^2=\dfrac{\beta^2b^2(\alpha^2-a^2)}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}$ となります。

比をとると，分母は消えますし，① については $\alpha^2-a^2=\beta^2+b^2$ の形で使えばよいことが分かります。

【解答】では逆算的にそれを記述していきます。

【解答】



C_2 の焦点は x 軸上なので，$0<\beta<\alpha$ として考える。

また，$a>0$，$b>0$ として考えてもよい。

C_1，C_2 の共通焦点を $\mathrm{F}(c\,,\ 0)$，$\mathrm{F'}(-c\,,\ 0)$ $(c>0)$ とする。

F は楕円 C_1 の焦点より，$c=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$

一方，F は双曲線 C_2 の焦点でもあり，$c=\sqrt{a^2+b^2}$

ゆえに，$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2$，すなわち

$$\alpha^2-a^2=\beta^2+b^2\ (\ =K\text{とおく}) \cdots ①$$

を得る。

今，C_1，C_2 の交点を $\mathrm{P}(p\,,\ q)$ とし，P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると

$$\ell_1 : \frac{px}{\alpha^2}+\frac{qy}{\beta^2}=1\,,\quad \ell_2 : \frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

交点は座標軸上にはないため，題意の接線 ℓ_1，ℓ_2 には傾きが存在する。

ℓ_1 の傾きを m_1 とすると，$m_1=-\dfrac{\beta^2p}{\alpha^2q}$

ℓ_2 の傾きを m_2 とすると，$m_2=\dfrac{b^2p}{a^2q}$

$$m_1m_2=-\frac{\beta^2p}{\alpha^2q}\cdot\frac{b^2p}{a^2q}$$

$$=-\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^2 \cdots ②$$

ここで，$\mathrm{P}(p\,,\ q)$ は C_1，C_2 上の点なので

$$\begin{cases}\dfrac{p^2}{\alpha^2}+\dfrac{q^2}{\beta^2}=1\\[2mm] \dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=1\end{cases}$$

を満たしている。

これを，p^2，q^2 についての連立方程式とみなし，p^2，q^2 について解くと

$$\begin{cases} p^2=\dfrac{\alpha^2a^2(\beta^2+b^2)}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}\left(=\dfrac{\alpha^2a^2K}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}\right) \\ q^2=\dfrac{\beta^2b^2(\alpha^2-a^2)}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}\left(=\dfrac{\beta^2b^2K}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}\right) \end{cases} \quad (\because ①)$$

ゆえに，

$$-\frac{p^2}{q^2}=-\frac{\dfrac{\alpha^2a^2K}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}}{\dfrac{\beta^2b^2K}{\beta^2a^2+\alpha^2b^2}}$$

$$=-\frac{\alpha^2a^2}{\beta^2b^2}$$

② に代入すると

$$m_1m_2=-\frac{\alpha^2a^2}{\beta^2b^2}\left(\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^2$$

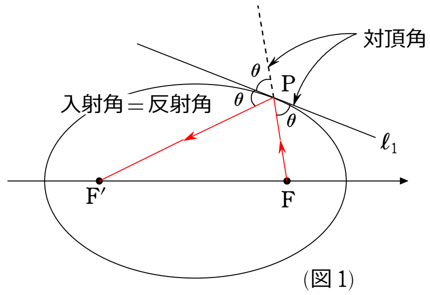
$$=-1$$

ゆえに，ℓ_1，ℓ_2 は直交することが示された。

【総括】

やるべきことは明確で，方針も立ちやすいとは思いますが，いかんせん計算量が多く，スジが悪いとグッチャグチャになります。

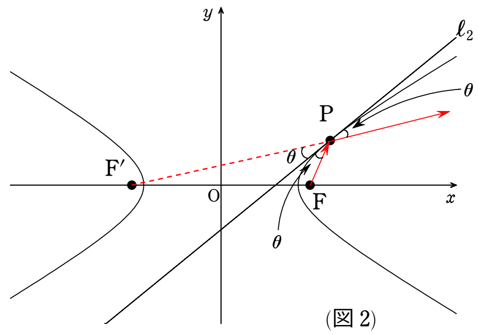
【参考】楕円と双曲線の光学的性質



(図 1)

楕円の場合，一方の焦点 F から出た光は F′ に向かって反射します。
（楕円を鏡だと思ってください。）

(図 1) のように，接線 ℓ_1 は ∠FPF′ の「外角の二等分線」です。

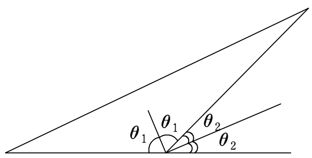


(図 2)

双曲線の場合，(図 2) のように，焦点 F から出た光は $\overrightarrow{\mathrm{F'P}}$ 方向に反射します。

(図 2) のように，接線 ℓ_2 は ∠FPF′ の「内角の二等分線」です。

一般に内角の二等分線と，外角の二等分線は直交します。((図 3) 参照)



(図 3)

$2\theta_1+2\theta_2=180°$
$\theta_1+\theta_2=90°$