次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項 a_n，b_n を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+4b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \\ a_1=1，b_1=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_{n+1}=5a_n-4b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \\ a_1=1，b_1=-1 \end{cases}$

【戦略 1】

連立漸化式の対応として代表的な対応としては 2 通りあります。

ここでは

1 文字消去

という方針で倒してみます。

(1) $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+4b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \cdots ② \end{cases}$

② より，$a_n=b_{n+1}-b_n$ （$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$ **でもある**）

これを ① に代入すると

$$b_{n+2}-b_{n+1}=(b_{n+1}-b_n)+4b_n$$

整理すると $b_{n+2}-2b_{n+1}-3b_n=0$ **と第 7 講で扱った 3 項間漸化式に帰着します。**

(2) **も同様に**

$$\begin{cases} a_{n+1}=5a_n-4b_n & \cdots ③ \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \cdots ④ \end{cases}$$

④ より，$a_n=b_{n+1}-b_n$（$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$）

③ に代入し，$b_{n+2}-b_{n+1}=5(b_{n+1}-b_n)-4b_n$ **で，整理すると**

$b_{n+2}-6b_{n+1}+9b_n=0$ **を得ます。**

これは 3 項間漸化式の特性方程式が重解となるパターンです。

【解 1】

(1) $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+4b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \cdots ② \end{cases}$

② より，$a_n=b_{n+1}-b_n$ （$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$）

これを ① に代入すると $b_{n+2}-b_{n+1}=(b_{n+1}-b_n)+4b_n$，すなわち

$$b_{n+2}-2b_{n+1}-3b_n=0$$

を得る。

これは $\begin{cases} b_{n+2}-3b_{n+1}=-(b_{n+1}-3b_n) & \cdots(ア) \\ b_{n+2}+b_{n+1}=3(b_{n+1}+b_n) & \cdots(イ) \end{cases}$ と 2 通りに

変形できる。

ここで，② より $b_2=a_1+b_1=2$

(ア) より，$b_{n+1}-3b_n=(b_2-3b_1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n$ $\cdots$(ウ)

(イ) より，$b_{n+1}+b_n=(b_2+b_1)\cdot 3^{n-1}=3^n$ $\cdots$(エ)

(エ)$-$(ウ) より，$4b_n=3^n-(-1)^n$

よって，$b_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$

$a_n=b_{n+1}-b_n$ に代入して，

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{3^{n+1}-(-1)^{n+1}-\{3^n-(-1)^n\}}{4} \\ &=\frac{3^n(3-1)-(-1)^n\{(-1)-1\}}{4} \\ &=\frac{2\cdot 3^n+2\cdot(-1)^n}{4} \\ &=\frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{aligned}$$

以上から，$\begin{cases} a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2} \\ b_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4} \end{cases}$ $\cdots$答

(2) $\begin{cases} a_{n+1}=5a_n-4b_n & \cdots ③ \\ b_{n+1}=a_n+b_n & \cdots ④ \end{cases}$

④ より，$a_n=b_{n+1}-b_n$（$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$）

③ に代入し，$b_{n+2}-b_{n+1}=5(b_{n+1}-b_n)-4b_n$ で，整理すると

$$b_{n+2}-6b_{n+1}+9b_n=0$$

これは $b_{n+2}-3b_{n+1}=3(b_{n+1}-3b_n)$ と変形できる。

ここで，④ より $b_2=a_1+b_1=0$

これより，$b_{n+1}-3b_n=(b_2-3b_1)\cdot 3^{n-1}=3^n$

ゆえに，$b_{n+1}=3b_n+3^n$ で，この両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{3^n}&=\frac{b_1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)\\&=\frac{n-2}{3}\end{aligned}$$

ゆえに，$b_n=\dfrac{n-2}{3^{n-1}}$

$a_n=b_{n+1}-b_n$ より，$\begin{aligned}a_n&=\frac{n-1}{3^n}-\frac{n-2}{3^{n-1}}\\&=\frac{n-1-3(n-2)}{3^n}\\&=\frac{-2n+5}{3^n}\end{aligned}$

以上から，$\begin{cases} a_n=\dfrac{-2n+5}{3^n} \\ b_n=\dfrac{n-2}{3^{n-1}} \end{cases}$ …答

【戦略 2】

与えられた漸化式の辺々について

上手い倍率を見つけて辺々操作

という方針も代表的です。

(1) **の** $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+4b_n \\ 2b_{n+1}=2a_n+2b_n \end{cases}$ **について**

$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+4b_n \\ 2b_{n+1}=2a_n+2b_n \end{cases}$ **の辺々を加えると**

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n) \cdots ①$$

一方で

$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+4b_n \\ -2b_{n+1}=-2a_n-2b_n \end{cases}$ **ですから，辺々加えると**

$$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n) \cdots ②$$

① より $a_n+2b_n=(a_1+2b_1)3^{n-1}=3^n$

② より $a_n-2b_n=(a_1-2b_1)(-1)^{n-1}=(-1)^n$

を得ますから，この a_n，b_n **についての連立方程式を解けば解決です。**

恐らく，多くの人の疑問は次のようなものでしょう。

疑問その 1

→ どうやってうまい倍率を発見したのか

これについては

$$a_{n+1}+x\,b_{n+1}=y(a_n+xb_n)$$

となるうまい x，y **を求めればよいことになります。**

今回は

$$\begin{aligned}a_{n+1}+xb_{n+1}&=(a_n+4b_n)+x(a_n+b_n)\\&=(1+x)a_n+(4+x)b_n\end{aligned}$$

よって，$(1+x)a_n+(4+x)b_n=y(a_n+xb_n)$ **となっていればよいことになります。**

これが全ての n **について成立するので**

$$\begin{cases} 1+x=y \\ 4+x=xy \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $(x, y)=(2, 3), (-2, -1)$

となり，”うまい x，y **” が見つかることになります。**

疑問その2

→ (1) はうまい x, y が2組見つかったが1組しかなかったら？

(2) が疑問その2のタイプの問題です。

(1) と同様に

$$a_{n+1}+x\,b_{n+1}=y\,(a_n+xb_n)$$

となるうまい x, y を求めてみます。

$$\begin{aligned}a_{n+1}+xb_{n+1}&=(5a_n-4b_n)+x\,(a_n+b_n)\\&=(5+x)a_n+(-4+x)\,b_n\end{aligned}$$

よって，$(5+x)a_n+(-4+x)b_n=y\,(a_n+xb_n)$ となればよく

これが全ての n について成立するので

$$\begin{cases}5+x=y\\-4+x=xy\end{cases}$$

y を消去すると，$-4+x=x\,(5+x)$ で整理すると

$x^2+4x+4=0$ となり，$(x+2)^2=0$ で，$x=-2$ という重解となります。

つまり，先ほどと違い，$(x,\ y)=(-2,\ 3)$ と1組しかありません。

げっ，と思うでしょうが，とりあえずこの $(x,\ y)=(-2,\ 3)$ によって

$$a_{n+1}-2b_{n+1}=3\,(a_n-2b_n)$$

と変形できますから，$a_n-2b_n=(a_1-2b_1)\,3^{n-1}=3^n$

となり，ここから，$a_n=2b_n+3^n$ と a_n を消去できます。

$b_{n+1}=a_n+b_n$ なので，

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=(2b_n+3^n)+b_n\\&=3b_n+3^n\end{aligned}$$

となり，第2講で扱った「心霊写真型」に帰着しました。

【解2】

(1) $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+4b_n\\2b_{n+1}=2a_n+2b_n\end{cases}$ の辺々を加えると

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=3\,(a_n+2b_n)\ \cdots①$$

一方で $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+4b_n\\-2b_{n+1}=-2a_n-2b_n\end{cases}$ で，辺々加えると

$$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)\ \cdots②$$

① より $a_n+2b_n=(a_1+2b_1)\,3^{n-1}=3^n$

② より $a_n-2b_n=(a_1-2b_1)\,(-1)^{n-1}=(-1)^n$

これら2式から $\begin{cases}a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}\\[2mm]b_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}\end{cases}$ …答

(2) $\begin{cases}a_{n+1}=5a_n-4b_n\\b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$ より，$\begin{cases}a_{n+1}=5a_n-4b_n\\-2b_{n+1}=-2a_n-2b_n\end{cases}$

ゆえに，$\begin{aligned}a_{n+1}-2b_{n+1}&=3a_n-6b_n\\&=3\,(a_n-2b_n)\end{aligned}$

よって，$\begin{aligned}a_n-2b_n&=(a_1-2b_1)3^{n-1}\\&=3^n\end{aligned}$

これより，$a_n=2b_n+3^n$ であり，$b_{n+1}=a_n+b_n$ に代入すると

$b_{n+1}=3b_n+3^n$ を得る。

両辺 3^{n+1} で割ると，$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{3^n}&=\frac{b_1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)\\&=\frac{n-2}{3}\end{aligned}$$

ゆえに，$b_n=\dfrac{n-2}{3^{n-1}}$

$a_n=b_{n+1}-b_n$ より，$\begin{aligned}a_n&=\frac{n-1}{3^n}-\frac{n-2}{3^{n-1}}\\&=\frac{n-1-3\,(n-2)}{3^n}\\&=\frac{-2n+5}{3^n}\end{aligned}$

以上から，$\begin{cases}a_n=\dfrac{-2n+5}{3^n}\\[2mm]b_n=\dfrac{n-2}{3^{n-1}}\end{cases}$ …答

【総括】

「条件 1 つで 1 文字消去」という原則で言えば，【戦略 1】の文字消去路線が分かりやすいでしょう。

ノーヒントであったり，問題を解く中で自分で処理しなければならない場面では，分かりやすいそちらで処理するのが確実性は高いと思います。

【戦略 2】の路線は，上手い倍率を見つける部分を誘導として出題されることが多いです。

いずれの路線についても，しっかり理解したうえで捌ききれるように準備しておく必要があります。