次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3\sqrt{a_n} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1=2 \\ {a_{n+1}}^2=4{a_n}^3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2{a_n}^2} \end{cases}$

【戦略】

今回扱うのは

$${a_{n+1}}^p=A{a_n}^q \text{ 型（そうだ，log　をとろう型）}$$

です。

(2) のような「もろこのタイプ」という場合だけでなく，(1) のような累乗根として与えられている場合についても，冷静に log　をとりましょう。

ただし，log　をとる際は真数条件を心配する必要がありますから，そのあたりを最低限記述しておくことに注意しましょう。

【解答】

(1)　帰納的に $a_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ であるから

両辺底が 3 の対数をとると，$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3{a_n}^{\frac{1}{2}}$

すなわち，$\log_3 a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\log_3 a_n+1$

$b_n=\log_3 a_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+1$

これは，$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(b_n-2)$ と変形できる。

ゆえに，
$$\begin{aligned} b_n-2&=(b_1-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=(\log_3 1-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=-\frac{1}{2^{n-2}} \\ &=-2^{2-n} \end{aligned}$$

これより，$\log_3 a_n=2-2^{2-n}$ で，$a_n=3^{2-2^{2-n}}$ …答

(2)　帰納的に $a_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ であるから（注 参照）

両辺底が 2 の対数をとると，$\log_2 {a_{n+1}}^2=\log_2 4{a_n}^3$

すなわち，$2\log_2 a_{n+1}=3\log_2 a_n+2$

これより，$\log_2 a_{n+1}=\dfrac{3}{2}\log_2 a_n+1$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+1$ で，これは

$b_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}(b_n+2)$ と変形できる。

$$\begin{aligned} b_n+2&=(b_1+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &=(\log_2 2+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，$b_n=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-2$，すなわち $\log_2 a_n=\dfrac{3^n-2^n}{2^{n-1}}$

よって，$a_n=2^{\frac{3^n-2^n}{2^{n-1}}}$ …答

注：**ある自然数 k に対して，$a_k>0$ と仮定すると**

${a_{k+1}}^2=4{a_k}^3$ **であり，**$a_{k+1}=\pm 2a_k\sqrt{a_k}$ **ですが，**

$a_{k+1}=-2a_k\sqrt{a_k}$ **とすると，**$a_{k+1}<0$ **で，**${a_{k+2}}^2=4{a_{k+1}}^3<0$ **となってしまい，不合理です。**

よって，$a_{k+1}=2a_k\sqrt{a_k}>0$ **となり，**$a_1>0$ **と合わせて帰納的に** $a_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ **が言えます。**

$a_{n+1}=2^{-1}{a_n}^{-2}$ **と見ます。**

(3)　帰納的に $a_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ であるから

両辺底が 2 の対数をとると，$\log_2 a_{n+1}=-1-2\log_2 a_n$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと，$b_{n+1}=-2b_n-1$

これは $b_{n+1}+\dfrac{1}{3}=-2\left(b_n+\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できる。

$$\begin{aligned} b_n+\frac{1}{3}&=\left(b_1+\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)^{n-1} \\ &=\frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1} \quad (\because\ b_1=\log_2 2=1) \end{aligned}$$

$b_n=\dfrac{4\cdot(-2)^{n-1}-1}{3}$，すなわち $\log_2 a_n=\dfrac{4\cdot(-2)^{n-1}-1}{3}$ を得て

$$a_n=2^{\frac{4\cdot(-2)^{n-1}-1}{3}} \text{ …答}$$

【総括】

累乗を扱うにあたり，対数は強力な道具です。

もろに指数表記されている形はもちろん，(1) のような累乗根として与えられている場合や，(3) のように分数をマイナス乗のように見る見方もあり，処理だけでなく，「 $\log$ をとる型だ」と判断する目も養っておく必要があります。