次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3a_n+n \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_{n+1}=-3a_n-4n+3 \\ a_1=-2 \end{cases}$

【戦略】

今回は

$a_{n+1}=pa_n+An+B$ 型
（特性方程式使うと事故る型）

です。

(1) **を例にとって考えます。初学者がよくやってしまう誤答は**

$x=3x+n$ **を解いて，** $x=\dfrac{n}{2}$ **としたあとに**

誤答

$$a_{n+1}+\frac{n}{2}=3\left(a_n+\frac{n}{2}\right)$$

とすると，$a_n+\dfrac{n}{2}=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}$

よって $a_n=\dfrac{3^n-n}{2}$

これは $a_{n+1}+\dfrac{n}{2}=3\left(a_n+\dfrac{n}{2}\right)$ **において** $b_n=a_n+\dfrac{n}{2}$ **としたときに，**

左辺が b_{n+1} ではない

ので等比数列とは言えないため，誤答ということになります。

第１講で扱った特性方程式の路線で単純にいくとこのように事故ります。

このタイプの倒し方でオーソドックスなのは

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2}=3a_{n+1}+n+1 \\ -) & a_{n+1}=3a_n+n \\ \hline & a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1 \end{array}$$

番号をズラして

階差を Get

という態度です。

この後は，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると，$b_{n+1}=3b_n+1$ で，これは特性方程式経由で解けますから，b_n（階差）を Get し，その後，階差の処理で a_n を Get できます。

【解答】

(1) $a_{n+1}=3a_n+n$ より，$a_{n+2}=3a_{n+1}+n+1$

$\begin{cases} a_{n+2}=3a_{n+1}+n+1 \cdots ① \\ a_{n+1}=3a_n+n \cdots ② \end{cases}$

①−② より，$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+1$

これは，$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$ と変形できる。

ここで，$a_2=3a_1+1=4$ であり，$b_1=a_2-a_1=3$

$b_n+\dfrac{1}{2}=\left(b_1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}=\dfrac{7\cdot 3^{n-1}}{2}$ で，$b_n=\dfrac{7\cdot 3^{n-1}}{2}-\dfrac{1}{2}$ を得る。

ゆえに，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{7\cdot 3^{n-1}}{2}-\dfrac{1}{2}$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{7}{2}\cdot 3^{k-1}-\frac{1}{2}\right) \\ &=1+\frac{\frac{7}{2}(3^{n-1}-1)}{3-1}-\frac{1}{2}(n-1) \\ &=\frac{7\cdot 3^{n-1}-2n-1}{4} \cdots (*) \end{aligned}$$

(*) に，$n=1$ を代入すると，$a_1=\dfrac{7-2-1}{4}=1$ であるため，
(*) は $n=1$ のときも成立する。

ゆえに，$n=1, 2, \cdots$ に対して，$a_n=\dfrac{7\cdot 3^{n-1}-2n-1}{4}$ …答

(2) $a_{n+1}=-3a_n-4n+3$ より，$a_{n+2}=-3a_{n+1}-4(n+1)+3$

$\begin{cases} a_{n+2}=-3a_{n+1}-4n-1 \cdots ③ \\ a_{n+1}=-3a_n-4n+3 \cdots ④ \end{cases}$

③−④ より，$a_{n+2}-a_{n+1}=-3(a_{n+1}-a_n)-4$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=-3b_n-4$

これは，$b_{n+1}+1=-3(b_n+1)$ と変形できる。

ここで，$a_2=-3a_1-4\cdot 1+3=5$ で，$b_1=a_2-a_1=7$

$b_n+1=(b_1+1)\cdot(-3)^{n-1}=8\cdot(-3)^{n-1}$ で，$b_n=8\cdot(-3)^{n-1}-1$

これより，$a_{n+1}-a_n=8\cdot(-3)^{n-1}-1$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{8\cdot(-3)^{k-1}-1\right\} \\ &=-2+\frac{8\left\{1-(-3)^{n-1}\right\}}{1-(-3)}-(n-1) \\ &=-2\cdot(-3)^{n-1}-n+1 \cdots (**) \end{aligned}$$

$(**)$ に $n=1$ を代入すると $a_1=-2$ を得るため，$(**)$ は $n=1$ のときも成立する。

ゆえに，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_n=-2\cdot(-3)^{n-1}-n+1\cdots$ 答

【戦略 2】

(1) を例にとります。

特性方程式を単純に用いると事故りますが，その事故の原因は

$a_{n+1}+\dfrac{n}{2}=3\left(a_n+\dfrac{n}{2}\right)$ **と変形して，** $b_n=a_n+\dfrac{n}{2}$ **とおいても**

$b_{n+1}=a_{n+1}+\dfrac{n}{2}$ **ではないということでした。**

その事故の反省から，与えられた漸化式を

ここの 3 は
与えられた漸化式を
考えれば当然です

$$a_{n+1}+\{\alpha(n+1)+\beta\}=3(a_n+\alpha n+\beta)$$

という形に変形できれば，今度こそ， $b_n=a_n+\alpha n+\beta$ **とおくことで**

$b_{n+1}=3b_n$ **と等比数列に帰着できると考えることができます。**

$a_{n+1}+\{\alpha(n+1)+\beta\}=3(a_n+\alpha n+\beta)$ **を整理すると**

$$a_{n+1}=3a_n+2\alpha n-\alpha+2\beta$$

で，これが最初に与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n+n$ **と一致していてほしいわけですから，**

$\begin{cases}2\alpha=1\\-\alpha+2\beta=0\end{cases}$ **を満たす** $\alpha,\ \beta$ **を考えればよく，** $\alpha=\dfrac{1}{2},\ \beta=\dfrac{1}{4}$ **です。**

つまり，最初に与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n+n$ **は**

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}=3\left(a_n+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$$

と変形できるため， $b_n=a_n+\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{4}$ **とおくと，** $b_{n+1}=3b_n$ **となり解決します。**

(2)　**(1) と同様にして，**

$$a_{n+1}+\{\alpha(n+1)+\beta\}=-3(a_n+\alpha n+\beta)$$

となるような $\alpha,\ \beta$ **を考えます。**

これは， $a_{n+1}=-3a_n-4\alpha n-\alpha-4\beta$ **と整理でき，これが最初に与えられた漸化式** $a_{n+1}=-3a_n-4n+3$ **と一致すればよく**

$\begin{cases}-4\alpha=-4\\-\alpha-4\beta=3\end{cases}$ **で，** $\alpha=1,\ \beta=-1$ **となります。**

つまり，与えられた漸化式は $a_{n+1}+(n+1)-1=-3(a_n+n-1)$

と変形でき， $b_n=a_n+n-1$ **とおけば，** $b_{n+1}=-3b_n$ **と等比数列の構造となり，解決します。**

【解 2】

(1)　与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n+n$ は

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}=3\left(a_n+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$$

と変形できる。

$$\text{ゆえに，}a_n+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}=\left(a_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot3^{n-1}=\frac{7\cdot3^{n-1}}{4}$$

これより，$a_n=\dfrac{7\cdot3^{n-1}-2n-1}{4}\cdots$ 答

(2)　与えられた漸化式 $a_{n+1}=-3a_n-4n+3$ は

$$a_{n+1}+(n+1)-1=-3(a_n+n-1)$$

と変形できる。

$$\text{ゆえに，}a_n+n-1=(a_1+1-1)\cdot(-3)^{n-1}=-2\cdot(-3)^{n-1}$$

これより，$a_n=-2\cdot(-3)^{n-1}-n+1\cdots$ 答

【総括】

一回は特性方程式を用いて事故ってほしいぐらいです。

その事故の原因を逆手に取った【戦略 2】の考え方やシナリオを実感することで，理解が深まると思いますし，それが勉強になります。

実戦の現場では，手慣れていれば【解 2】の方針で処理してしまった方が手早く捌くことが出来ると思います。

【解 1】の「番号上げて（下げて）辺々操作」という態度も，応用が効きますので，「楽だから【解 2】の方針でよくね」とは思わずに，両方のシナリオを理解し，インストールしておきましょう。

また，【戦略 2】で詳しく導出過程について見ましたが，【解答】では

「俺こんな式変形思いついちゃいました」

という天下り的な記述で大丈夫です。