次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1} \\ a_1=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6} \\ a_1=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5} \\ a_1=1 \end{cases}$

【戦略】

まずは

$$a_{n+1}=\frac{ra_n}{pa_n+q}$$ （分数漸化式 メタボ型）

を考えてみます。

その処方箋は「逆数をとる」という態度です。

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{pa_n+q}{ra_n}$$

漸化式だって逆三角形の体型の方がいいのです。

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ **とおくと，** $b_{n+1}=\dfrac{q}{r}b_n+\dfrac{p}{r}$ **で第 1 項で扱った 1 次型に帰着します。**

次に分数漸化式の一般型

$$a_{n+1}=\frac{ra_n+s}{pa_n+q}$$ （分数漸化式一般型）

の処方箋です。

特性方程式 $x=\dfrac{rx+s}{px+q}$ **を整理した** $px^2+(q-r)x-s=0$ **の解を** α，β **とすると**

$\alpha\neq\beta$ なら $b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列に帰着

$\alpha=\beta$ なら $b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等差数列に帰着

なお，以下理由を考える際，分母が 0 になる心配があったり，場合分けする必要があったりします。

ただ，そういった特殊なケースについてはここまでの学習がきちんと済んでいれば対応可能なので，以下ではそういった細かいことは抜きにして考えていきます。

＜理由＞

$\alpha\neq\beta$ のときについて

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\alpha&=\frac{ra_n+s}{pa_n+q}-\alpha \\ &=\frac{ra_n+s-\alpha(pa_n+q)}{pa_n+q} \\ &=\frac{(r-p\alpha)a_n-(q\alpha-s)}{pa_n+q} \end{aligned}$$

$px^2+(q-r)x-s=0$ の解が α なので，$p\alpha^2+(q-r)\alpha-s=0$ で

$q\alpha-s=\alpha(r-p\alpha)$ であり，

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{(r-p\alpha)a_n-\alpha(r-p\alpha)}{pa_n+q}$$

$$=\frac{(r-p\alpha)(a_n-\alpha)}{pa_n+q}$$

同様にして $a_{n+1}-\beta=\dfrac{(r-p\beta)(a_n-\beta)}{pa_n+q}$

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\dfrac{(r-p\beta)(a_n-\beta)}{pa_n+q}}{\dfrac{(r-p\alpha)(a_n-\alpha)}{pa_n+q}}$$

$$=\frac{r-p\beta}{r-p\alpha}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

したがって $b_{n+1}=\dfrac{r-p\beta}{r-p\alpha}b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は等比数列。

$\alpha=\beta$ のときは

先ほどと同様にして $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(r-p\alpha)(a_n-\alpha)}{pa_n+q}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}-\alpha}&=\frac{pa_n+q}{(r-p\alpha)(a_n-\alpha)} \\ &=\frac{1}{r-p\alpha}\cdot\frac{pa_n+q}{a_n-\alpha} \\ &=\frac{1}{r-p\alpha}\cdot\left(p+\frac{p\alpha+q}{a_n-\alpha}\right) \end{aligned}$$

$px^2+(q-r)x-s=0$ の重解が α で，$\alpha=\dfrac{-(q-r)}{2p}$

注：**解の公式** $x=\dfrac{-(q-r)\pm\sqrt{D}}{2p}$（$D$：判別式）**で** $D=0$ **のときを考える。**

なので，$2p\alpha=r-q$ で，これを変形すると $p\alpha+q=r-p\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}-\alpha}&=\frac{1}{r-p\alpha}\cdot\left(p+\frac{r-p\alpha}{a_n-\alpha}\right) \\ &=\frac{p}{r-p\alpha}+\frac{1}{a_n-\alpha} \end{aligned}$$

であり，$b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+$(定数) となり，数列 $\{b_n\}$ は等差数列。

【解答】

(1)　帰納的に $a_n \fallingdotseq 0$ であるから，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ の両辺逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n-1}{a_n},\ \text{すなわち}\ \frac{1}{a_{n+1}}=-\frac{1}{a_n}+4$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}=-b_n+4$ で，$b_{n+1}-2=-(b_n-2)$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=5$ であり，$b_n-2=(b_1-2)\cdot(-1)^{n-1}=3\cdot(-1)^{n-1}$

$b_n=3\cdot(-1)^{n-1}+2$ で，$\dfrac{1}{a_n}=3\cdot(-1)^{n-1}+2$

ゆえに，$a_n=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^{n-1}+2}$ …答

(2)　帰納的に $a_n>0$ である。

$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ とおくと，

$b_n=\dfrac{a_n+4}{a_n-2}$ とおいてもいいですが
それだと分母が 0 にならない
ことを示す必要が出てきます。

陰でコッソリ
$x=\dfrac{4x+8}{x+6}$
すなわち
$x^2+2x-8=0$
を解くと
$x=2,\ -4$

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}\\
&=\frac{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}-2}{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+4}\\
&=\frac{2a_n-4}{8a_n+32}\\
&=\frac{2}{8}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+4}\\
&=\frac{1}{4}b_n
\end{aligned}$$

$b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+4}=\dfrac{1}{4}$ なので，$b_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$\dfrac{a_n-2}{a_n+4}=\dfrac{1}{4^n}$　で，$4^n(a_n-2)=a_n+4$

これを a_n について解くと，$a_n=\dfrac{2(4^n+2)}{4^n-1}$ …答

(3)　$0<a_k<3$ ($k=1,2,\cdots$) だとすると，

$$\begin{aligned}
a_{k+1}&=\frac{a_k-9}{a_k-5}\\
&=1+\frac{4}{5-a_k}\\
&<1+\frac{4}{5-3}\\
&=3
\end{aligned}$$

また，$a_k-9<0$，$a_k-5<0$ なので，$a_{k+1}>0$

$0<a_1<3$ より，帰納的に $0<a_n<3$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$　とおくと

陰でコッソリ
$x=\dfrac{x-9}{x-5}$
すなわち
$x^2-6x+9=0$
を解くと
$x=3$（重解）

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{1}{a_{n+1}-3}\\
&=\frac{1}{\dfrac{a_n-9}{a_n-5}-3}\\
&=\frac{a_n-5}{-2a_n+6}\\
&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-5}{a_n-3}\\
&=-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{a_n-3}\right)\\
&=\frac{1}{a_n-3}-\frac{1}{2}\\
&=b_n-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=-\dfrac{1}{2}$ であり，$b_n=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(n-1)=-\dfrac{n}{2}$

$\dfrac{1}{a_n-3}=-\dfrac{n}{2}$　であるため，$a_n-3=-\dfrac{2}{n}$

$$a_n=3-\frac{2}{n}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

分数漸化式についてはメタボ型は即解決と言い切ってほしい基本形です。

大抵の場合，一般型が出題される場合は誘導がつくことが多いですが，トップレベルになると，

導出過程にスポットを当てて問いにする
ノーヒントでそのまま一般項を出させる
一般項には触れずに，漸化式のまま扱う

といったような踏み込んだ出題も全然ありますから誘導に頼らない態度も養っておきましょう。