次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2a_n+3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=-3a_n+2 \end{cases}$

【戦略】

＜ Type 0 ＞

$a_{n+1}=a_n+d$

→ 初項 a_1，公差 d の等差数列として処理

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_{n+1}=ra_n$

→ 初項 a_1，公比 r の等比数列として処理

$a_n=a_1r^{n-1}$

$a_{n+1}=a_n+f(n)$

→ 階差数列を利用して一般項を求める

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\ (n\geqq 2)$

まずはこの形が基本中の基本で，形と意味をしっかりと捉えて即答できる必要があります。

今回の形は

＜Type 1＞

$a_{n+1}=pa_n+q$ （$p\neq 1$）型

という最もオーソドックスで頻出かつ基本の漸化式です。

→ 特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ の解 $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$ を辺々引く。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=pa_n+q \\ -) & \alpha=p\alpha+q \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \end{array}$$

「こんな α があればいいなぁ」という思いのもとでの変形です。

$b_n=a_n-\alpha$ とおけば，$b_{n+1}=pb_n$ となり，＜Type 0＞の等比型に帰着

というのが処方箋になります。

解答では「こんな式変形思いついちゃいました」という天下り式に変形します。

【解答】

(1) $a_{n+1}=2a_n+3$ を変形すると，$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

$b_n=a_n+3$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1(=a_1+3=4)$， 公比 2 の等比数列なので，

$b_n=4\cdot 2^{n-1}$ となり，$a_n+3=4\cdot 2^{n-1}\ (=2^{n+1})$

ゆえに，$a_n=2^{n+1}-3$ …答

※ **慣れてくると置き換えなくても，** $\overset{\text{塊としての一般項}}{\boxed{a_n+3}}=\overset{\text{塊としての初項}}{\boxed{(a_1+3)}}\cdot\overset{\text{公比}}{\boxed{2}}^{n-1}$

と一気に処理できますし，処理してほしいです。

(2) **ではこのように処理します。**

(2) $a_{n+1}=-3a_n+2$ を変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-3\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} a_n-\frac{1}{2} &= \left(a_1-\frac{1}{2}\right)\cdot(-3)^{n-1} \\ &= \frac{5}{2}\cdot(-3)^{n-1} \end{aligned}$$

よって，$a_n=\dfrac{5\cdot(-3)^{n-1}+1}{2}$ …答

【総括】

初学者の段階だと，$a_{n+1}=\alpha$，$a_n=\alpha$ として，$\alpha=p\alpha+q$ という特性方程式を解く部分で，

「なんで $a_n=a_{n+1}=\alpha$ としていいんですか？」という疑問をもつ人も多いと思います。

「 $\alpha=p\alpha+q$ としていい」とかそういうことではなく，

「 $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α があるといいなぁ」

というニュアンスです。

ちなみに $p=1$ のときは＜Type 0＞ の等差型なのでこの問題以前の処理で片付きますから，問題ないでしょう。