α を $0<\alpha<1$ の有理数とし，$x>0$，$y>0$ の範囲で曲線 $x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ を考える。この曲線上の点 P における接線が両座標軸と交わる点を A，B とするとき，線分 AB の長さが P の位置に関係なく一定になるような α の値を求めよ。

＜ '82 岐阜大 ＞

【戦略】

$x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\alpha x^{\alpha-1}+\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dx}=0$$

ですから，$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha-1}$ を得ます。

これは，曲線 $x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ 上の点 $(x,\ y)$ に対する接線の傾きが得られていることを意味します。

x，y だと分かりにくい人も多いと思うので，$\mathrm{P}(s,\ t)$ として考えます。

$\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，P における接線 ℓ の傾きは $-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}$ ということが言えます。

これにより，ℓ の方程式は $y=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}(x-s)+t$

すなわち $y=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}x+\dfrac{s^{\alpha}+t^{\alpha}}{t^{\alpha-1}}$ となります。

$(s,\ t)$ は 曲線 $x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ 上の点なので，$s^{\alpha}+t^{\alpha}=1$ を満たしていることから，結局 ℓ の方程式は $y=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}x+\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ という部分まで整理できます。

この式が得られればこっちのもので，x 切片は $s^{1-\alpha}$，y 切片は $t^{1-\alpha}$ と分かりますから，

$$\mathrm{AB}^2=(s^{1-\alpha})^2+(t^{1-\alpha})^2=s^{2-2\alpha}+t^{2-2\alpha}$$

と AB の長さについての式が得られます。

見た目は 2 変数関数ですが，s，t は $s^{\alpha}+t^{\alpha}=1$ を満たしている従属な関係なので，実質は s についての 1 変数関数とみなしてよさそうです。

気持ちの上で，AB^2 を s の関数と見て，$f(s)$ とします。

任意の s に対して，AB が一定値（AB^2 が一定値）となるということは任意の s に対して $f'(s)=0$ となるということです。

【解答】

$x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\alpha x^{\alpha-1}+\alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$0<\alpha<1$ なので，$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha-1}\ \cdots(*)$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，P における接線 ℓ の傾きは $-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}$

これより，ℓ の方程式は $y=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}(x-s)+t$

すなわち，$y=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}x+\dfrac{s^{\alpha}+t^{\alpha}}{t^{\alpha-1}}$

$(s,\ t)$ は 曲線 $x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ 上の点なので，$s^{\alpha}+t^{\alpha}=1$ を満たしていることから，ℓ の方程式は

$$y=-\left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1}x+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\ \cdots ①$$

① に $x=0$ を代入すると $y=\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\ (=t^{1-\alpha})$

① に $y=0$ を代入すると $0=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}x+\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$

これより，$x=s^{1-\alpha}$ を得る。

P における接線 ℓ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(s^{1-\alpha})^2+(t^{1-\alpha})^2\\&=s^{2-2\alpha}+t^{2-2\alpha}\end{aligned}$$

$f(s)=s^{2-2\alpha}+t^{2-2\alpha}$ とおく。

任意の s でこれが定数関数となるには，任意の s に対して $f'(s)=0$ となる。

$$f'(s)=(2-2\alpha)s^{1-2\alpha}+(2-2\alpha)t^{1-2\alpha}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=(2-2\alpha)\left\{s^{1-2\alpha}+t^{1-2\alpha}\cdot\frac{dt}{ds}\right\}$$

$f'(s)=0$ となるとき，$0<\alpha<1$ より，$2-2\alpha\neq 0$ なので

$$s^{1-2\alpha}+t^{1-2\alpha}\cdot\frac{dt}{ds}=0$$

$(*)$ より，$\dfrac{dt}{ds}=-\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}$ だから

$$s^{1-2\alpha}+t^{1-2\alpha}\left\{-\left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1}\right\}=0$$

これを整理すると，$\left(\dfrac{s}{t}\right)^{1-2\alpha}=\left(\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1}$

これが，$s^{\alpha}+t^{\alpha}=1$ を満たす任意の s，t に対して成立するので，

$$1-2\alpha=\alpha-1$$

これより，$\alpha=\dfrac{2}{3}\ \cdots$ 答

【総括】

本問が良問である理由は

1：$f(x,\ y)=0$ という形の関数（陰関数）に関する微分の基本事項を確認するうえで非常にいい問題であるということ

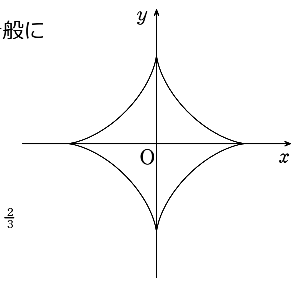
2：本問で主張している

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 上の点における接線は，両座標軸によって切り取られる長さが一定となる

という性質的な面白さを実感できる

という点です。

今回話題になっている $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で表される曲線は「アステロイド」と呼ばれるものです。



アステロイドの概形は右図のようになり，一般に

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad (a>0)$$

というパラメータ表示となります。

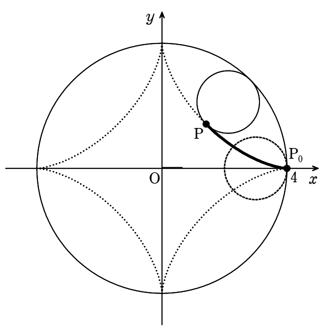
ちなみに，一般の陰関数表示は $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ という形になります。

アステロイドが本問のような「接線が両軸によって切り取られる長さが一定」という性質をもっているという有名事実を知っている人からすれば，$\alpha=\dfrac{2}{3}$ というのはバレバレですが，もちろんそれを前面に押し出すような解答は許されません。

なお，円の中を円が滑らずに転がってできる円の軌跡を

「ハイポサイクロイド」

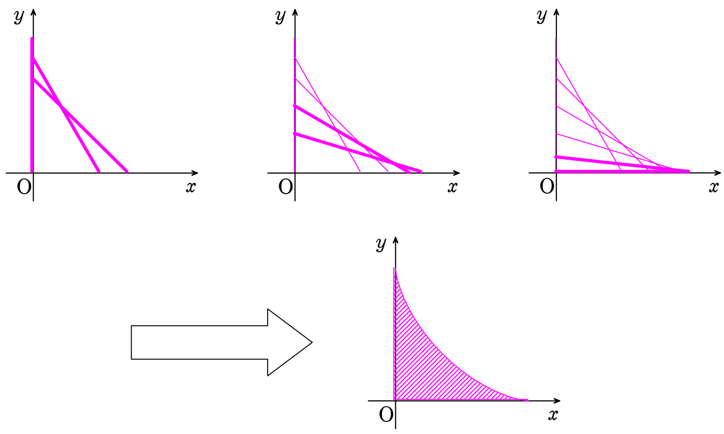
と言います。



特に，(定円の半径)：(動円の半径)$=4:1$ のときのハイポサイクロイドは，今回のアステロイドとなります。

ハイポサイクロイドの話題からこの話題に振られるようなことがあった場合にも反応できるようにしておくと万全でしょう。

また，



のように，長さが一定の棒が倒れていくときの棒の通過領域の境界線（棒の包絡線）がアステロイドという見方もできます。

＜陰関数の微分についての補足＞

$x^{\alpha}+y^{\alpha}=1$ という曲線において，$\dfrac{dy}{dx}$ を得ようと思うと

$y=f(x)$ という形に直して，微分するというのが直接的ですが，この

$y=f(x)$ に直す

というのが億劫です。

そこで，$y=f(x)$ という形に**直せたとして**

$x^{\alpha}+(f(x))^{\alpha}=1$ **という気持ちで**両辺 x で微分するわけです。

そうなると，合成関数の微分法により

$$\alpha x^{\alpha-1}+\alpha\{f(x)\}^{\alpha-1}\cdot f'(x)=0$$

$\alpha x^{\alpha-1}+\boxed{\alpha y^{\alpha-1}\cdot\dfrac{dy}{dx}}=0$ に対応します。

一旦 y で微分しておいて，y を x で微分する

を得て，今回 $\alpha \fallingdotseq 0$ であることから $x^{\alpha-1}+\{f(x)\}^{\alpha-1}\cdot f'(x)=0$

となり，$f'(x)=-\left\{\dfrac{x}{f(x)}\right\}^{\alpha-1}$ ということになります。