以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式

$$x^{2n-1}=\cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n>\cos 1$ を示せ。

(3) (1) で定まる数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n\ ,\ b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n\ ,\ c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

< '19 東京大 >

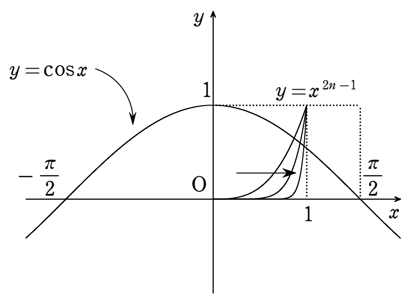
【戦略】

(1) **闇雲に $f(x)=x^{2n-1}-\cos x$ とおいて，$f'(x)=\cdots$ としていってもキリがありません。**

左辺も右辺もグラフの概形はおおよそ掴めますから，明らかに交点をもたないような範囲をどんどん削っていき，$0<x<1$ の範囲で交点をもち得ることまで絞れれば，あとは両グラフの単調性から「ただ 1 つ」ということも言えるでしょう。

(2) **視覚的に考えればほぼ自明です。**

(3) **a については結論の予測はできると思います。**



と，n が大きくなるにつれ，交点の x 座標は 1 に近づいていきますから，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であることは予測できます。

明らかに，$a_n<1$ であることは分かりますから，あとは下から挟んで「はさみうちの原理」で仕留めたいところです。

下から挟む際には (2) がヒントとなるでしょう。

a_n が直接求める事ができないのですから使える手法は「はさみうちの原理」しかありえないと，照準を定めてください。

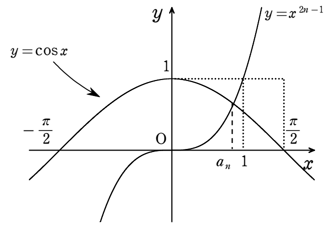
$\lim_{n\to\infty}{a_n}^n$ については，${a_n}^{2n-1}=\cos a_n$ という関係式から，無理矢理 $\lim_{n\to\infty}({a_n}^{2n-1})^{\frac{n}{2n-1}}$ と見てやれば解決です。

$c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$ は頭を悩ませるかもしれませんが，$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}$ ですから，$\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$ という形で見れるような $F(x)$ を見出すことができれば微分係数の定義によって仕留めることができます。

【解答】

(1) $f(x)=\cos x$ ，$g(x)=x^{2n-1}$ とし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とする。

(i) $x\leqq -1$ のとき



$$\begin{aligned}h(-1)&=f(-1)-g(-1)\\&=\cos(-1)-(-1)^{2n-1}\\&=\cos 1-(-1)\\&=\cos 1+1>0\end{aligned}$$

$x=-1$ では $f(x)>g(x)$ …①

$x<-1$ では $\begin{cases}f(x)\geqq -1\\ g(x)<-1\ (\Leftrightarrow\ -g(x)>1)\end{cases}$

よって，$f(x)-g(x)>0$，すなわち $h(x)>0$ …②

①，② より $x\leqq -1$ のとき $h(x)>0$

(ii) $-1\leqq x\leqq 0$ のとき

$\begin{cases}0<f(x)\leqq 1\\ -1\leqq g(x)\leqq 0\end{cases}$ より，$h(x)>0$

(iii) $x>1$ のとき

$\begin{cases}f(x)<1\\ g(x)\geqq 1\ (\Leftrightarrow\ -g(x)\leqq -1)\end{cases}$

よって，$f(x)-g(x)<0$，すなわち $h(x)<0$

(iv) $0<x<1$ のとき

$f(x)$ は上に凸の単調減少関数
$g(x)$ は下に凸の単調増加関数

したがって，$f(x)=g(x)$，すなわち $x^{2n-1}=\cos x$ となる x がただ 1 つ存在する。

(v) $x=1$ のとき　$h(1)=\cos 1-1<0$

以上 (i) ～ (v) より，x の方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ一つの実数解 a_n をもつ。

(2) (1) の考察より，a_n は $0<a_n<1$ を満たしている。($0<a_n<1<\frac{\pi}{2}$)

$y=\cos x$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲では単調減少ゆえ，$\cos a_n>\cos 1$ である。

(3) ${a_n}^{2n-1}=\cos a_n$ （$0<a_n<1$）

${a_n}^{2n-1}=\cos a_n>\cos 1$ であるので，$\cos 1<{a_n}^{2n-1}<1$

辺々正の数なので，$\dfrac{1}{2n-1}$ 乗しても同値性は失わないため，

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}<a_n<1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}=(\cos 1)^0=1$ なので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

よって，$a=1$ …答

また，

$$\begin{aligned}b&=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^{2n-1}\right)^{\frac{n}{2n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}(\cos a_n)^{\frac{n}{2n-1}}\\&=(\cos 1)^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{\cos 1}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}c&=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}\end{aligned}$$

ここで，${a_n}^{2n-1}=\cos a_n$ より，${a_n}^{2n}=a_n\cos a_n$

${a_n}^n>0$ より，${a_n}^n=\sqrt{a_n\cos a_n}$ であるため，

$$\begin{aligned}c&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\quad (F(x)=\sqrt{x\cos x}\ \text{とおいた})\\&=F'(1)\end{aligned}$$

ここで，$F'(x)=\dfrac{1}{2}(x\cos x)^{-\frac{1}{2}}\{\cos x+x(-\sin x)\}$

$$=\frac{\cos x-x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$$

したがって，$F'(1)=\dfrac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$ となり，

$$c=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

(1) が案外侮れません。

機械的に「差を取って，微分して，…」という態度では，はじき返されます。

曲線と曲線の交点を論じるという危ない橋を渡ることにはなりますが，移項せずにそのまま $y=x^{2n-1}$ と $y=\cos x$ のグラフの交点を論じる方が得策です。

確実に交点を持たない部分をどんどん切り捨てるという大胆な態度は，自分で論理を組み立てる経験がないと中々できないのではないでしょうか。

ただ，$y=x^{2n-1}$ と $y=\cos x$ のグラフを考えさえできれば，たとえ論じきることができなくても，(1) の主張は納得できますし，(2) だけでも確保することは可能です。

(3) は極限の計算経験の有無が出来不出来に直結します。

総合的に見ると，中途半端な勉強をしてきた生徒をはじき返す要素が随所にあります。

処理自体はよくある定番の処理ですが，それを見出すためには観察力と洞察力を要する良問です。