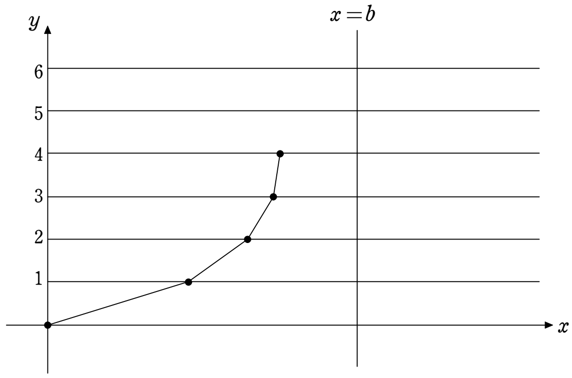
　xy 平面上で原点から傾き a $(a>0)$ で出発し折れ線状に動く点 P を考える。ただし，点 P の y 座標はつねに増加し，その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 $(s>0)$ に変化するものとする。

　P の描く折れ線が直線 $x=b$ $(b>0)$ を横切るための a，b，s に関する条件を求めよ。

＜ ’88 東京大 ＞

【戦略】

点 P の動くイメージとしては以下のようになります。



条件や設定次第で，$x=b$ に届かないこともありそうです。

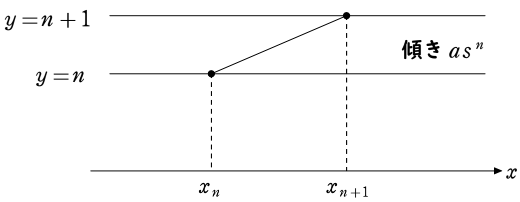
この折れ線が段々「反り立っていく」と，点 P の x 座標は何かに収束しそうです。

その収束先を α として，$\alpha>b$ であれば，この折れ線が $x=b$ を横切ることになります。

また，そもそも点 P の x 座標が収束せず，発散すれば即 $x=b$ を横切ると言えることになります。

それを踏まえて，点 P が $y=n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ に来たときの座標を (x_n, n) として，$\lim_{n\to\infty} x_n$ について調べていきます。

この x_n については



という図を考えると

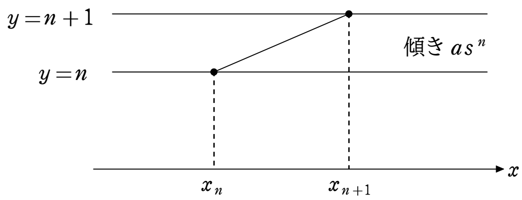
$\dfrac{1}{x_{n+1}-x_n}=as^n$ **より，** $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{as^n}$ **ということになりますから**

階差数列が Get できることになります。

【解答】

$y=n$ に達したときの点 P の座標を (x_n, n) $(n=0, 1, 2, \cdots)$ とする。

傾きは初項 a，公比 s の等比数列なので，(図 1) のようになる。



(図 1)

このとき，(図 1) の傾きに注目すると

$$\frac{1}{x_{n+1}-x_n}=as^n\text{，すなわち}\ x_{n+1}-x_n=\frac{1}{as^n}$$

以下，$n\to\infty$ のときを考えるため，$n\geqq 1$ として考えることにしてもよい。

$n\geqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} x_n&=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{as^k}\quad(\because\ x_0=0)\\ &=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{s}\right)^k \end{aligned}$$

(i)　$0<\dfrac{1}{s}<1$，すなわち $s>1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}x_n&=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s}\right)^k\\ &=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{s}}\\ &=\frac{1}{a}\cdot\frac{s}{s-1}\\ &=\frac{s}{a(s-1)} \end{aligned}$$

　よって，題意を満たすためには $\dfrac{s}{a(s-1)}>b$ となればよい。

(ii)　$\dfrac{1}{s}\geqq 1$，すなわち $0<s\leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}x_n&=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s^k}\\ &=\infty\ (\text{条件 } a>0 \text{ に注意}) \end{aligned}$$

　よって，$0<s\leqq 1$ が成り立っていれば，点 P が描く折れ線は $x=b$ を横切ることになる。

(i)，(ii) より，求める a，b，s に関する条件は

「$s>1$ かつ $\dfrac{s}{a(s-1)}>b$ 」　または　$0<s\leqq 1$ … 答

【総括】

この問題の大まかな構造やイメージをつかむことが大切で，それにより最終的に何が言えればよいのかが見えてきます。

直感的に

$s>1$ だと反り立っていく

$s=1$ だと直進していく

$0<s<1$ だとお辞儀していく

というイメージがあれば，$0<s\leqq 1$ だと無条件で $x=b$ を横切ることは予想の範疇だと思います。
（かといってそれを自明のものとしてよいかということについては，本問の趣旨を考えるとマズイでしょう。横切るなら横切る理由を，横切らないなら横切らない理由を論じるのが本問の趣旨だと思います。）

x_n の一般項を出すにあたっては，「水平方向の歩幅」（階差）に注目して $\sum$ していくことがスムーズに出てきてほしいですが，このあたりは素の力や地力が問われるでしょう。

無限等比級数の収束に関わる基本的な運用力も試す良問だと思います。