和の評価方法【面積評価とはさみうちの原理】

【復習用問題１】

(1) 自然数 n に対して，次の不等式を証明しなさい。

$$n\log n-n+1\leqq\log(n\,!)\leqq(n+1)\log(n+1)-n$$

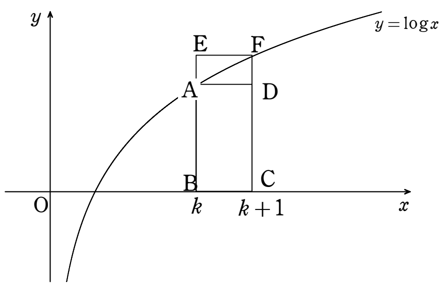
(2) 次の極限の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めなさい。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n\,!)}{n\log n-n}$$

＜ '06 東京都立大 ＞

【戦略】

例題として扱った大阪大の問題同様「面積評価」という手法を考えます。



というグラフを考えることにより

$$\log k\leqq\int_k^{k+1}\log x\,dx\leqq\log(k+1)$$

という不等式を得ます。

この最左辺や最右辺に $k=1,\ 2,\ \cdots$ として辺々加えることで $\sum\log k$ を登場させることを目論むわけです。

端っこの値ではイレギュラーに対応する必要がありますが，示すべき形を見て対応します。

このコピペ感から同じ問題だということを感じて下さい。

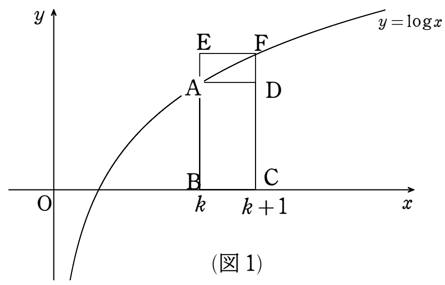
(2) (1) **で得た不等式を「はさみうち」の材料にすることを考えます。**

その際 $n\log n-n$ で辺々割る必要があります。

これは $n=1,\ 2$ だと負になって不等号の向きが変わってしまいますが，我々は $n\to\infty$ のときを考えるのでそんな小さな n などに目をくれる必要はありません。

なので $n\geqq3$ として考えても問題はありません。

【解答】



(図 1)

(1) $\log(n\,!)=\sum_{k=1}^{n}\log k$ … ①

以下 $n\geqq2$ とする。

(図 1) において，

（長方形 ABCD の面積）$\leqq\int_k^{k+1}\log x\,dx\leqq$（長方形 EBCF の面積）

であるから

$$\log k\leqq\int_k^{k+1}\log x\,dx\leqq\log(k+1)\ \cdots(*)$$

$(*)$ の右側の不等式に $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ を代入し，辺々加えると

$$\int_1^2\log x\,dx+\int_2^3\log x\,dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^{n}\log x\,dx\leqq\log2+\log3+\cdots\cdots+\log n$$

すなわち，$\int_1^n\log x\,dx\leqq\log2+\log3+\cdots\cdots+\log n$

$\log1=0$ より右辺に $\log1$ を加えてもよく

$$\int_1^n\log x\,dx\leqq\log1+\log2+\log3+\cdots\cdots+\log n$$

$$\int_1^n\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^n=n\log n-n+1$$

これより，$n\log n-n+1\leqq\sum_{k=1}^{n}\log k$ が示された。 … ②

一方，$(*)$ の左側の不等式に $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して加えると

$$\log1+\log2+\cdots\cdots+\log n\leqq\int_1^2\log x\,dx+\int_2^3\log x\,dx+\cdots\cdots+\int_n^{n+1}\log x\,dx$$

ゆえに $\sum_{k=1}^{n}\log k\leqq\int_1^{n+1}\log x\,dx$

ここで，$\int_1^{n+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^{n+1}=(n+1)\log(n+1)-n$

ゆえに，$\sum_{k=1}^{n}\log k\leqq(n+1)\log(n+1)-n$ … ③

②，③ より，

$$n\log n-n+1\leqq\sum_{k=1}^{n}\log k\leqq(n+1)\log(n+1)-n$$

これは，$n=1$ のときも成立する。

① より，自然数 n に対して

$$n\log n-n+1 \leqq \log(n!) \leqq (n+1)\log(n+1)-n$$

が成立する。

(2) $n\to\infty$ のときを考えるので $n\geqq 3$ で考えてよい．

このとき，$n\log n-n=n(\log n-1)>0$ だから (1) の不等式の辺々を $n\log n-n$ で割って

$$\frac{n\log n-n+1}{n\log n-n} \leqq \frac{\log(n!)}{n\log n-n} \leqq \frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n\log n-n}$$

ここで，(最左辺)$=1+\dfrac{1}{n\log n-n} \to 1\ (n\to\infty)$

$$(\text{最右辺})=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log\left\{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)-\frac{1}{\log n}}{1-\frac{1}{\log n}} \to 1\ (n\to\infty)$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n-n}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n-n}=1 \cdots 答$$

【総括】

例題の大阪大学の問題で扱った問題が理解できていれば方針に困ることはないでしょう。

(1) は $\log(n!)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log k$ と見て面積評価に持ち込みます。

例題で扱った問題と違うのは，(*) の左側の不等式と右側の不等式に代入して辺々加える k の範囲が異なることですね。

これは示すべき不等式の右辺に $(n+1)\log(n+1)$ という部分があることから自分で見抜けなければいけません。

【余談】

「スターリングの公式」と呼ばれる次のような事実があります。

n が十分大きいとき，$n!\fallingdotseq\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$

これを用いると (2) の極限値が推測できます。

$$\log(n!)\fallingdotseq\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}$$

で，これを求める極限の式に代入してみると

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}}{n\log n-n}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{\log n}+\frac{\log\sqrt{2\pi}}{n\log n}}{1-\frac{1}{\log n}} \to 1\ (n\to\infty)$$

もちろん高校数学の範囲外なので解答では使えるわけがありませんし覚える必要もありません。