n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$$

が成り立つことを示せ。

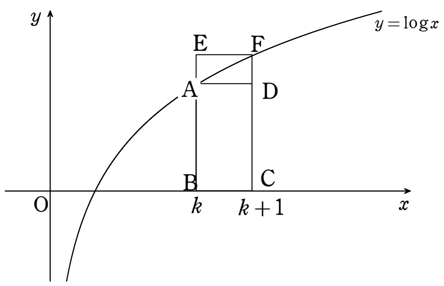
(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ を求めよ。

＜ '96 大阪大 ＞

【戦略】

単純に差を取る作戦は見通しが悪いです。

そこで，今回扱う和の形を評価する方法の 1 つとして「面積評価」という手法を考えます。



というグラフを考えることにより

$$\log k<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$$

という不等式を得ます。

この最左辺や最右辺に $k=1,\ 2,\ \cdots$ として辺々加えることで $\sum\log k$ を登場させることを目論むわけです。

少し端っこの値ではイレギュラーに対応する必要がありますが，示すべき形を見て対応します。

(2) **(1) で得た不等式の真ん中は $\log(n!)$ です。**

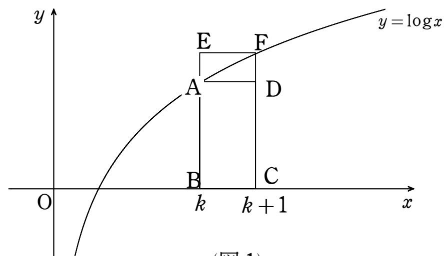
目標である $(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ の極限を考えるにあたり，$\log$ をとった

$$\frac{1}{n\log n}\log(n!)$$

を登場させます。

【解答】

(1)



(図 1)

(図 1) において，$y=\log x$ のグラフが上に凸であることも考えると

$$(\text{長方形 ABCD の面積})<\int_k^{k+1}\log x\,dx<(\text{長方形 EBCF の面積})$$

であるから

$$\log k<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)\quad\cdots(*)$$

$(*)$ に $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ を代入して辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\log k<\int_1^2\log x\,dx+\int_2^3\log x\,dx+\cdots\cdots+\int_{n-1}^{n}\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$$

すなわち，

$$\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log(n-1)<\int_1^n\log x\,dx<\log 2+\log 3+\cdots\cdots+\log n$$

$\log 1=0$ より最右辺に $\log 1$ を加えてもよく

$$\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log(n-1)<\int_1^n\log x\,dx<\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log n\ \cdots①$$

$$\int_1^n\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^n=n\log n-n+1$$

これより，① の右側の不等式から $n\log n-n+1<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log k$ が示された。

① の左側の不等式より，

$$\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log(n-1)+\log n<n\log n-n+1+\log n$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が示された。

以上から，$n\log n-n+1<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$ が成立することが示された。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log k=\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log n$

$\qquad =\log(1\times 2\times\cdots\times n)$

$\qquad =\log(n\,!)$

(1) で示した不等式の辺々に $\dfrac{1}{n\log n}$ をかけて

$$\frac{1}{n\log n}(n\log n-n+1)<\frac{1}{n\log n}\cdot\log(n\,!)<\frac{1}{n\log n}\{(n+1)\log n-n+1\}$$

すなわち

$$1-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}<\log(n\,!)^{\frac{1}{n\log n}}<1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}\right)=1$$

ゆえに，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(n\,!)^{\frac{1}{n\log n}}=1$

これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n\,!)^{\frac{1}{n\log n}}=e$ …答

【総括】

和の評価方法の１つとして

「面積を持ち出して評価する」

という方法はレパートリーの１つとして準備しておきたいところです。

本問はポイントが凝縮されていて，雑味がない良素材な問題だと思います。