【復習用問題 2】

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

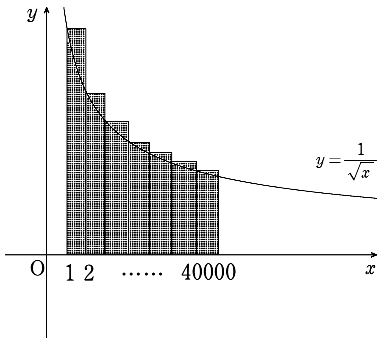
＜ '14 大阪大 ＞

【戦略】

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}$ **は現実的に求まりません。**

そこで， $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ **が図形的に何を意味しているかを考えましょう。**

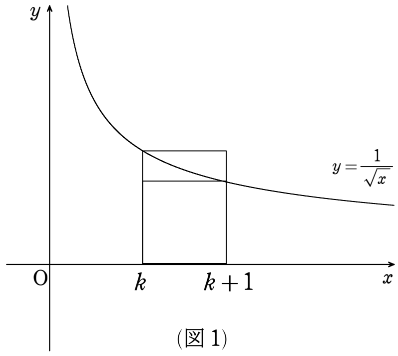
$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ **は 右図の長方形の面積の和を表します。**



そこで $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ **を面積評価してやることにより** $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ **の値を絞込み，整数部分を特定するという方針を選択します。**

【解答】では $k\leqq x\leqq k+1$ **という** k **番目の長方形を考えます。**

【解答】



(図 1)

(図 1) において面積の大小を考えると

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{k}}\quad(\ k\text{ は自然数 })\cdots(*)$$

$(*)$ において k に 1 から 39999 を代入して辺々加えると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}<\int_1^{40000}x^{-\frac{1}{2}}\,dx<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}\quad\cdots①$$

$$\int_1^{40000}x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{40000}=398$$

したがって ① の左側の不等式から $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}<398$

ゆえに，$\displaystyle 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}<399\ \cdots②$

一方 ① の右側の不等式から，$\displaystyle 398<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}$

ゆえに，

$$398+\frac{1}{\sqrt{40000}}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}+\frac{1}{\sqrt{40000}}\quad\cdots③$$

②，③ より，

$$398+\frac{1}{\sqrt{40000}}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}<399$$

すなわち，$\displaystyle 398+\frac{1}{200}<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<399$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ の整数部分は } 398\cdots\text{答}$$

【総括】

「求まらない Σ は面積評価」という基本的な態度です。