

単位円上の複素数【追加問題】

【追加問題】

複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ を満たしている。

このとき

$$\triangle ABC \text{ が正三角形} \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

であることを証明せよ。

【戦略】

⇒ の流れについて

$\triangle ABC$ が正三角形なので、重心と外心が一致します。

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ ということから外心は原点 O なので、重心も O ということになり、

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 0, \text{ すなわち, } \alpha+\beta+\gamma=0 \text{ を得ます。}$$

これより

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

を得ます。

⇐ の流れについて

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = -1, \text{ すなわち } (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = -\alpha\beta\gamma$$

を展開して整理すると

$$3\alpha\beta\gamma + \alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \gamma\alpha(\gamma+\alpha) = 0$$

を得ます。

$$3 + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} = 0$$

$$\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right) + \left(1 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}\right) = 0$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta} = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) = 0$$

$$|\alpha+\beta+\gamma|^2 = 0$$

これより、 $\alpha+\beta+\gamma=0$ となり、特に $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0$ ですから、 $\triangle ABC$ の重心が原点 O だと言えます。

O は $\triangle ABC$ の外心でもあるため、 $\triangle ABC$ は正三角形ということが言えます。

【解答】

(⇒ についての証明)

$\triangle ABC$ は正三角形なので、重心と外心が一致する。

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ なので、この三角形 ABC の外心は原点 O であり、重心も原点 O である。

$$\text{ゆえに, } \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 0, \text{ すなわち } \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$\text{このとき, } \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

となり、

$$\triangle ABC \text{ が正三角形} \Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

が示された。

(⇐ についての証明)

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = -1, \text{ すなわち } (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = -\alpha\beta\gamma$$

が成り立っているとき、 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = -\alpha\beta\gamma$ を展開して整理すると

$$3\alpha\beta\gamma + \alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \gamma\alpha(\gamma+\alpha) = 0$$

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ で、 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ であるため、両辺 $\alpha\beta\gamma (\neq 0)$ で割ると

$$3 + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} = 0$$

となり、これは

$$\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right) + \left(1 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}\right) = 0$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta} = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) = 0$$

$$|\alpha+\beta+\gamma|^2 = 0$$

と変形できるため、 $\alpha+\beta+\gamma=0$ を得て、 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0$ である。

これより、 $\triangle ABC$ の重心は原点 O である。

O は $\triangle ABC$ の外心でもあるため、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

$$\text{ゆえに } \triangle ABC \text{ が正三角形} \Leftarrow \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = -1 \text{ が成り立つ。}$$

以上から $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ を満たしているとき

$$\triangle ABC \text{ が正三角形} \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

であることが示された

【総括】

個人的に正三角形というキレイな三角形になる必要十分条件として

$$\frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$

が1ではなく、-1という値になるというのが意外

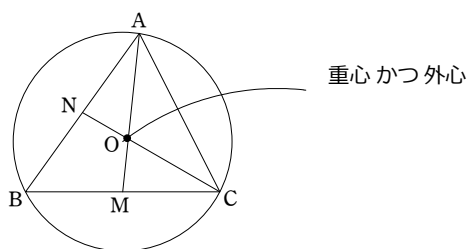
でした。

本問はどちらの流れにしても、
外心と重心が一致する三角形は正三角形に限る

ということが効いてきました。

これについて、試験場においてきちんと証明するかどうかは時間との相談
でしょう。

【重心と外心が一致する三角形が正三角形となることの証明】



$\triangle ABC$ の重心と外心が一致しているとします。

外心の性質から $OA = OC$ ($= 2x$ とおきます)

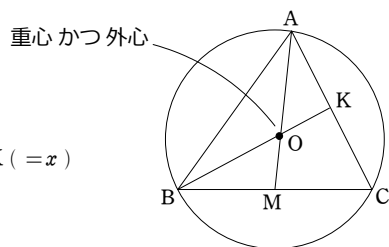
重心の性質から $OM = ON$ ($= x$)

対頂角は等しく、 $\angle AON = \angle COM$

よって、 $\triangle AON \cong \triangle COM$ が言えるため、 $AN = CM$

N, M はそれぞれ辺 AB, BC の中点であるため、 $AB = BC$

同様に見て



$OA = OB$ ($= 2x$), $OM = OK$ ($= x$)

$\angle AOK = \angle BOM$

ゆえに、 $\triangle AOK \cong \triangle BOM$ で、 $AK = BM$

M, K はそれぞれ、辺 BC, CA の中点より、 $AC = BC$

以上から $AB = BC = CA$ となり、 $\triangle ABC$ は正三角形