単位円上の複素数

複素数 α，β，γ が，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ を満たすとき $\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ は実数であることを証明せよ。

＜ '05 弘前大 ＞

【戦略 1】

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ ，**すなわち** $|\alpha|^2=|\beta|^2=|\gamma|^2=1$ **なので**

$$\alpha\overline{\alpha}=1,\ \beta\overline{\beta}=1,\ \gamma\overline{\gamma}=1$$

が成り立ちます。

$z=\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ **とおいたとき，** $z=\overline{z}$ **を示すことになります。**

$\overline{\square}$ **という形を嫌うのであれば，** $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$，$\overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$ **と見ます。**

【解 1】

$z=\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ とする。

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ ，すなわち $|\alpha|^2=|\beta|^2=|\gamma|^2=1$ なので

$$\begin{cases}\alpha\overline{\alpha}=1\\ \beta\overline{\beta}=1\\ \gamma\overline{\gamma}=1\end{cases}\text{，すなわち}\quad\begin{cases}\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}\\ \overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}\end{cases}\quad\cdots①$$

$$\overline{z}=\frac{(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\overline{\beta}+\overline{\gamma})(\overline{\gamma}+\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right)}{\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}}\quad(\because ①)$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\cdot\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\cdot\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}\cdot\alpha\beta\gamma$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=z$$

以上から，$z=\overline{z}$ となり，z は実数である。

【戦略 2】

$\alpha\overline{\alpha}=1$，$\beta\overline{\beta}=1$，$\gamma\overline{\gamma}=1$ **から，分数の形を嫌うのであれば**

$$\frac{1}{\alpha}\ \text{を}\ \overline{\alpha},\ \frac{1}{\beta}\ \text{を}\ \overline{\beta},\ \frac{1}{\gamma}\ \text{を}\ \overline{\gamma}$$

と見ることになります。

【解 2】

$z=\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ とする。

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ ，すなわち $|\alpha|^2=|\beta|^2=|\gamma|^2=1$ なので

$$\begin{cases}\alpha\overline{\alpha}=1\\ \beta\overline{\beta}=1\\ \gamma\overline{\gamma}=1\end{cases}\text{，すなわち}\quad\begin{cases}\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}\\ \overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}\end{cases}\quad\cdots①$$

$$z=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}$$

$$=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}$$

$$=(\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta)(\beta\overline{\beta}+\overline{\beta}\gamma)(\gamma\overline{\gamma}+\overline{\gamma}\alpha)$$

$$=(1+\overline{\alpha}\beta)(1+\overline{\beta}\gamma)(1+\overline{\gamma}\alpha)$$

一方

$$\overline{z}=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\overline{\beta}+\overline{\gamma})(\overline{\gamma}+\overline{\alpha})\cdot\frac{1}{\overline{\alpha}}\cdot\frac{1}{\overline{\beta}}\cdot\frac{1}{\overline{\gamma}}$$

$$=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\overline{\beta}+\overline{\gamma})(\overline{\gamma}+\overline{\alpha})\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$$

$$=(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\beta)(\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\gamma)(\overline{\gamma}\alpha+\overline{\alpha}\alpha)$$

$$=(\overline{\alpha}\beta+1)(\overline{\beta}\gamma+1)(\overline{\gamma}\alpha+1)$$

以上から $z=\overline{z}$ となり，z は実数である。

【総括】

【解 1】,【解 2】いずれにせよ $z=\overline{z}$ を示しにいくという路線は外したくありません。

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ がどこで効いてくるか(逆に言えばどう効かせていくか)については共役複素数の処理 $z\overline{z}=|z|^2$ という形で効かせていきたいという気持ちが大切です。

また,むやみに展開する前に一呼吸おいてください。

バラバラにして得るものがあればいいですが,散らかしただけで収集がつかなくなる事の方が多いですので。