正の整数 n に対し，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}$$

とする。

(1) I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2) $n\geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。
D を底面とし，点 $(0，0，1)$ を頂点とする円錐を C とする。
C を平面 $x=\dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

＜ '19 名古屋大 ＞

【戦略】

前半の計算は後半の体積計算のための布石となります。(解く前から想定できてほしい)

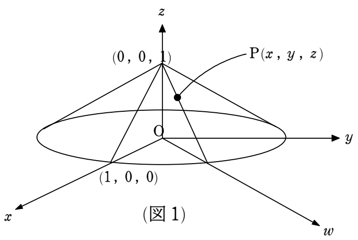
(1) はノーヒントだと難しい積分計算ですが，有名な形の積分なのでノーヒントでもできるようにしておくべきでしょう。

（同じ年 (2019 年度) の京都大学がノーヒントで出題しています。）

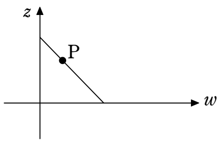
(2) は部分積分による積分漸化式の作成という定番の流れですが，部分積分の形にもっていけるかが勝負です。

後半の立体 S の断面を考えるにあたっては円錐面の方程式を求めることになります。

円錐の方程式の立式については経験が必要です。



(図 1)



(図 2)

円錐面を「母線の回転体」と見るニュアンスで考えます。

スタートの母線は考えやすい $z=-x+1$ として，この母線の z 軸回転体と捉えます。

(図 1) のように w 軸を考えて，wz 平面で考えます。((図 2) を参照)

文字で考えるとグチャグチャになるという人は

(タテ)$=-$(ヨコ)$+1$ という関係性が保たれている

と考えてください。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta\\
&=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin\theta|-\log|1-\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\
&=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2\\
&=\log(2+\sqrt{3})\ \cdots \text{答}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}(\tan\theta)'\,d\theta\\
&=\left[\tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{n-2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan\theta)(2-n)(\cos\theta)^{1-n}(-\sin\theta)\,d\theta\\
&=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(n-2)\frac{1}{(\cos\theta)^{n-1}}\sin\theta\,d\theta\\
&=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^n\theta}\,d\theta\\
&=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}\,d\theta\\
&=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^n\theta}-\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\right)d\theta\\
&=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)(I_n-I_{n-2})
\end{aligned}$$

これより，$(n-1)I_n=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}$

すなわち，$I_n=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}}{n-1}$ $\cdots$ 答

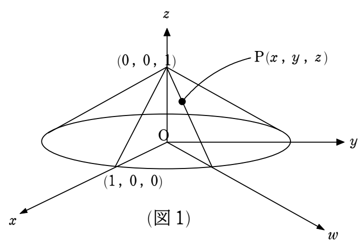
(3) 円錐面 C 上の点 $\mathrm{P}(x，y，z)$ について，円錐 C の側面は xz 平面上の直線 $z=-x+1$ を z 軸の周りに 1 回転してできる円錐である。

(図 1) のように w 軸をとると，点 P は wz 平面における

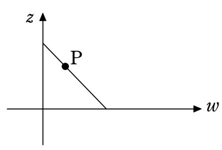
直線 $z=-w+1$ 上の点

である。((図 2) も参照)

$\mathrm{P}(x，y，z)$ のとき，$w=\sqrt{x^2+y^2}$ なので，$z=-(\sqrt{x^2+y^2})+1$ を満たす。



(図 1)



(図 2)

整理すると，$x^2+y^2=(1-z)^2$ であり，円錐の側面 C 上の点 $(x,\ y,\ z)$ がこの関係式を満たすことから，これが円錐 C の側面を表す方程式である。

$z=k$ による S の切り口 の断面積を T とする。

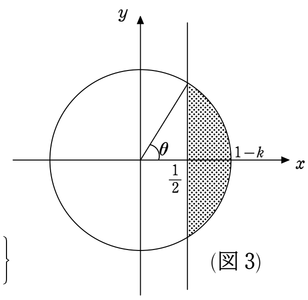
円錐 C の $z=k$ による切り口の境界の円の式は $x^2+y^2=(1-k)^2$

ゆえに，$z=k$ による S の切り口は
右の(図3)のようになる。

(この切り口が存在するのは $0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$)

ゆえに，(図3)のように θ を定めると

$$T=2\times\left\{\frac{1}{2}(1-k)^2\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-k)\sin\theta\right\}$$



(図3)

ここで，$(1-k)\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より

$$1-k=\frac{1}{2\cos\theta}\ \cdots①\ \left(\Leftrightarrow\ k=1-\frac{1}{2\cos\theta}\ \cdots②\right)$$

円が絡んだ面積ですからどうしても
角度 θ を用いる必要が出てきます。
後の置換積分のために k と θ の関係性
を出しておきます。

① より，$T=2\times\left\{\dfrac{\theta}{8\cos^2\theta}-\dfrac{\sin\theta}{8\cos\theta}\right\}$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

となる。

$\int_{\bigcirc}^{\triangle}T\,d\theta$ ではありません。
$z=k$ で切ったのであれば
途中どんな文字が出てこよう
とも $\int_{\square}^{\triangle}T\,dk$ です。

求める体積 V は

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}T\,dk$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}T\frac{dk}{d\theta}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta\quad(\because\ ②)$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\,(\cos\theta)^{-4}\sin\theta\ d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\left(\frac{1}{3}(\cos\theta)^{-3}\right)'d\theta$$
$$=\left[\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{(\cos\theta)^3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3$$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta=I_3-I_1$

したがって，$V=\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{8}{9}\pi-\dfrac{1}{3}I_3-(I_3-I_1)\right\}$

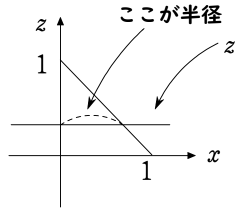
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{8}{9}\pi-\frac{4}{3}I_3+I_1\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{8}{9}\pi-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot2+I_1}{2}+I_1\right\}\quad(\because\ (2))$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{8}{9}\pi-\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}I_1\right)+I_1\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{8}{9}\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}I_1\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{8}{9}\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\log(2+\sqrt{3})\right\}\quad(\because\ (1))$$
$$=\frac{1}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3})\ \cdots\text{答}$$

【総括】

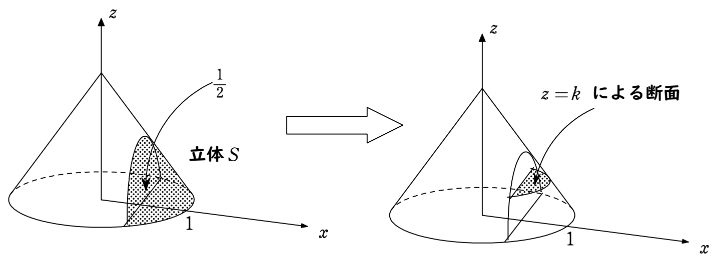
円錐面の方程式を求める事は経験がないと中々難しいと思いますので，

【解答】のように立式できるよう訓練しておくことが大切です。

ただ，今回は円錐の方程式が出せなくても，$z=k$ で切ったときの断面が円（もっと言うと円の一部）であることが分かれば半径を幾何的に求めることもできます。



このように幾何的にやろうとした場合，



などとある程度の全体像を把握する必要も出てくるでしょう。