△OABにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\dfrac{3}{5}$ のとき，∠AOBの２等分線とBを中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の，Oを原点とする位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

＜’04　京都大＞

**【戦略】**

**題意の交点をPとしたとき，**

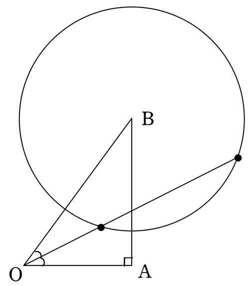
**∠AOBの２等分線上　かつ　円上**

**という２つを翻訳していくことになります。**

**∠AOBの２等分線上の点Pを $t$ などの文字を利用して立式し，円上の点であることからこの $t$ に条件が加わり特定される見通しが立つでしょう。**

**もちろん交点は２つありますから，$t$ も２つ出てきます。２等分線は単位ベクトルを作り，菱形の対角線として処理するのが定番です。**

【解答】




$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}=\dfrac{1}{5}\vec{b}$ とする。

∠AOBの２等分線上の点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}\right)=\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{t}{5}\vec{b}\quad\cdots ①$$

と表せる。

一方，点PがBを中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円上の点のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{10}$，すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=10$ を満たす。

ここで，
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{t}{3}\vec{a}+\left(\frac{t}{5}-1\right)\vec{b}$$

ゆえに，$\left|\dfrac{t}{3}\vec{a}+\left(\dfrac{t}{5}-1\right)\vec{b}\right|^2=10$

$$\frac{t^2}{9}|\vec{a}|^2+2\cdot\frac{t}{3}\left(\frac{t}{5}-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\frac{t}{5}-1\right)^2|\vec{b}|^2=10$$

今，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\angle\mathrm{AOB})=3\cdot5\cdot\dfrac{3}{5}=9$ より

$$\frac{t^2}{9}\cdot9+2\cdot\frac{t}{3}\left(\frac{t}{5}-1\right)\cdot9+\left(\frac{t}{5}-1\right)^2\cdot25=10$$

整理して，$16t^2-80t+75=0$

$$(4t-15)(4t-5)=0$$

これより，$t=\dfrac{15}{4}$，$\dfrac{5}{4}$ を得る。

$t=\dfrac{15}{4}$ のとき，①より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

$t=\dfrac{5}{4}$ のとき，①より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

求める位置ベクトルは $\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$　…答

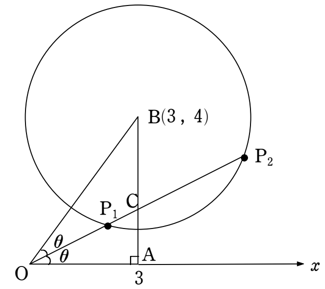
【戦略 2】

**この 2 等分線と辺 AB の交点を C としたとき，OC の長さが比較的容易に求まることから $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の伸縮によって題意の位置ベクトルを求めてみます。**

**この伸縮の倍率を把握するにあたっては座標や幾何的な解法が有効になってきます。**

【解 2】

(図 1) のように O を原点として座標軸を定める。



(図 1)

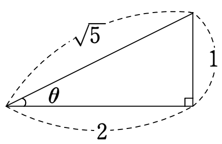
この円の方程式は

$(x-3)^2+(y-4)^2=10$ ⋯ ㈠

さて (図 1) において $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}=\dfrac{1+\dfrac{3}{5}}{2}=\dfrac{4}{5}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$



(図 2)

(図 2) の直角三角形を考えると $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，∠AOB の二等分線の式は $y=\dfrac{1}{2}x$ ⋯ ㈡

すると，C $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ で，OC$=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

㈠，㈡ を連立して

$(x-3)^2+\left(\dfrac{1}{2}x-4\right)^2=10$

整理して，$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$ より，$x=2,\ 6$

ゆえに，(図 1) において P$_1(2,\ 1)$，P$_2(6,\ 3)$

$$\mathrm{OP_1}=\sqrt{5},\ \mathrm{OP_2}=3\sqrt{5}$$

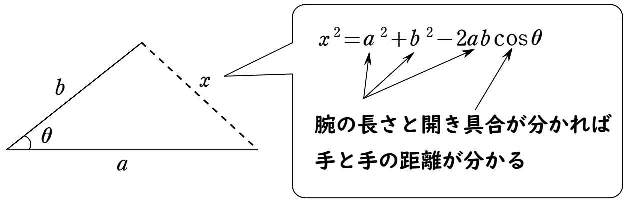
$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\frac{\mathrm{OP_1}}{\mathrm{OC}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{5}}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=\frac{5}{12}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=\frac{\mathrm{OP_2}}{\mathrm{OC}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3\sqrt{5}}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

よって，求める位置ベクトルは $\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$ ⋯答

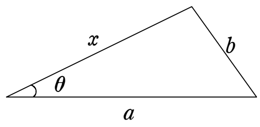
【戦略 3】

**2 辺挟角に対して余弦定理を用いるのが余弦定理の王道的な使い方です。**




**未知数 $x$ が $x^2=$ という形で出てくるため，$x=\pm\sqrt{\phantom{x}}$ と 2 つ出てきても確実に負の解は不適となるからです。**

**これを破って余弦定理を用いると**

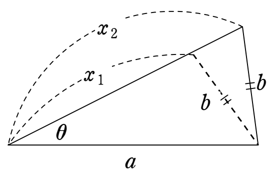



$$x^2+a^2-2ax\cos\theta=b^2$$

**整理すると，$x^2-(2a\cos\theta)x+a^2-b^2=0$ を得ます。**

**$x=x_1,\ x_2$ と 2 つの解が出てくるため，もし，2 つとも正の値であったら「今のシチュエーションだとどっちだ？」と迷いやすくなります。**

**これについては図形的に**



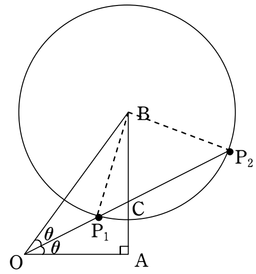

**というシチュエーションを意味します。**

※ $\begin{cases} x_1^{\,2}+a^2-2ax_1\cos\theta=b^2 \\ x_2^{\,2}+a^2-2ax_2\cos\theta=b^2 \end{cases}$

**このように，二等辺三角形によって，2 通り出てきてしまうのですが，それを「逆手にとって」敢えて余弦定理を利用してみます。**

【解 3】

**【解 2】と同様に $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を得るところまでは同じ。**




OP$_i=x$ （$i=1,\ 2$）として
△OBP$_i$ に対して余弦定理より

$5^2+x^2-2\cdot 5\cdot x\cdot\cos\theta=(\sqrt{10})^2$

$25+x^2-4\sqrt{5}x=10$ で，これを整理すると $x^2-4\sqrt{5}x+15=0$

$(x-\sqrt{5})(x-3\sqrt{5})=0$ であり，$x=\sqrt{5},\ 3\sqrt{5}$ を得る。

ゆえに，図において OP$_1=\sqrt{5}$，OP$_2=3\sqrt{5}$

また，直角三角形 OAC に注目すれば，OC $\cos\theta=$ OA

よって，OC$\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=3$ であることから OC$=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\frac{\mathrm{OP_1}}{\mathrm{OC}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{5}}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=\frac{5}{12}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=\frac{\mathrm{OP_2}}{\mathrm{OC}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3\sqrt{5}}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

よって，求める位置ベクトルは $\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$ ⋯答

【総括】

位置ベクトルを求めるにあたり

長さと方向

をいかに導出するかという点が山場であり，その方法は様々ありましたが，二等分線の方向ベクトルとして，ひし形の対角線を用いる【解 1】についてはぜひ押さえておきたい解法です。

【解 2】の座標による路線については多少のゴリ押し感はありますが，解ききるのに無理のない範疇かなと思います。

【解 3】は大人がカッコつけた観賞用の解答です。