$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする。

このとき，

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

の最大値を求めよ。

< '99 京都大 >

**【戦略 1】**

**多変数関数の最大問題なので，まずは「独立 or 従属」を見ます。**

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ **という関係から従属 3 変数だということが分かりますから，まずは 1 文字消去を行います。（ここでは** $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ **と見ます）**

**すると，** $\sin\alpha\sin\beta\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$ **と** $\alpha$, $\beta$ **という 2 変数関数の最大問題になりますが，** $\alpha$, $\beta$ **は独立です。**

**そこで，手なりに予選決勝法で行く流れにいきたいところです。**
**ここでは** $\alpha$ **を止めて** $\beta$ **の関数と見ることにします。**

**もちろん，** $f(\beta)=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$ **と見て，** $f'(\beta)$ **を計算するのもいいですが，（【解 2】参照）よく見てみると，** $\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$ **には** $\beta$ **が 2 ヵ所に散らばっていますから，一つにまとめるために積和公式を用いていくことを考えたいですね。**

**そこまでクリアーできれば，容易に予選が終わり，あとは** $\alpha$ **の固定をはずして決勝戦をしてフィニッシュです。**

【解答】

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より，

2 ヵ所で動く $\beta$ を
1 ヵ所に集めました

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma&=\sin\alpha\sin\beta\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}\\&=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\\&=\sin\alpha\cdot\left[-\frac{1}{2}\{\cos(\beta+\alpha+\beta)-\cos(\beta-(\alpha+\beta))\}\right]\quad(\because\ \text{積和公式})\\&=-\frac{1}{2}\sin\alpha\{\cos(2\beta+\alpha)-\cos(-\alpha)\}\\&=\frac{1}{2}\sin\alpha\{\cos\alpha-\cos(2\beta+\alpha)\}\end{aligned}$$

ここで， $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)>0$ より，$\alpha$, $\beta$ は $\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\\ \alpha+\beta<\pi\end{cases}$ を満たす実数である。

$\frac{1}{2}\sin\alpha\{\cos\alpha-\cos(2\beta+\alpha)\}$ について，$\alpha$ を固定し，$\beta$ を変数とみる。

**こいつが $-1$ になれるかを見ます**

このとき，$0<\beta<\pi-\alpha$ なので，$2\beta+\alpha=\pi$ は実現可能であり，

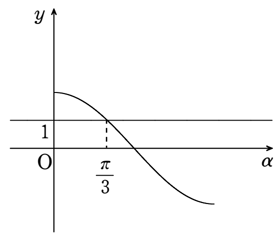
$\cos(2\beta+\alpha)$ は $\beta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ のとき，最小値 $-1$ をとり

$\frac{1}{2}\sin\alpha\{\cos\alpha-\cos(2\beta+\alpha)\}\leqq\frac{1}{2}\sin\alpha(\cos\alpha+1)$

**決勝進出者です。**

ここで，$f(\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha(\cos\alpha+1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=\frac{1}{2}\{\cos\alpha(\cos\alpha+1)+\sin\alpha(-\sin\alpha)\}\\&=\frac{1}{2}\{\cos^2\alpha+\cos\alpha-(1-\cos^2\alpha)\}\\&=\frac{1}{2}(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)\end{aligned}$$




$0<\alpha<\pi$ の範囲では，

| $\alpha$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $(\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\alpha)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(\alpha)$ | | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ | ↘ | |

ゆえに，

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\{\cos\alpha-\cos(2\beta+\alpha)\}\leqq\frac{1}{2}\sin\alpha(\cos\alpha+1)\leqq\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

等号成立は $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ かつ，$\beta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ ，すなわち

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}\ \left(\text{このとき }\gamma=\frac{\pi}{3}\right)\text{ のとき}$$

以上から $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ で，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ は

最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ をとる。 …答

【戦略 2】

【戦略 1】で見た

2 ヵ所に散らばっている $\beta$ を 1 ヵ所にまとめる

ということが出来なかった場合，微分でゴリゴリ計算することになります。

【解 2】部分的別解

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma &= \sin\alpha\sin\beta\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}\\ &= \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ここで，この式を $\beta$ の関数とみて，$f(\beta)$ とする。

$$\begin{aligned}f'(\beta) &= \sin\alpha\{\cos\beta\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\}\\ &= \sin\alpha\ \sin\{(\alpha+\beta)+\beta\}\\ &= \sin\alpha\ \sin(2\beta+\alpha)\end{aligned}$$

$\alpha<2\beta+\alpha<2\pi-\alpha$ なので，

| $\beta$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$ | $\cdots$ | $(\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\beta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(\beta)$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{2}\sin\alpha(\cos\alpha+1)$ | $\searrow$ | |

よって，$f(\beta)\leqq f\left(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\alpha(\cos\alpha+1)$

（以下 【解 1】 に準じる）

【戦略 3】

【戦略 1】【戦略 2】は「多変数関数の扱い方」という How to にあたる分野別学習 における常識的な考えに基づく戦略です。

一方，観点別学習の切り口で言えば，本問は明らかに「対称性」をもっています。

最大最小問題へのアプローチは

1 変数ならグラフをかけ（微分せよ）

2 変数以上なら

- 従属 …
  - 文字消去可能 … 文字消去
  - 文字消去困難 …
    - 逆像法
    - 絶対不等式の活用
- 独立 …
  - 予選決勝法
  - 絶対不等式の活用

というのが代表的なセオリーですし，あるいは

線形計画法【逆像法（しらみつぶしの考え方）の一種】

（ $=1$ になるかな？ $=2$ になるかな？ … $=k$ になるかな？）
→（なれるとしたらどんな $k$ ？）

など，様々なアプローチがあります。

さて，今言った台詞の中で，「対称性」という言葉に準じた態度はどれでしょう？

少なくとも【戦略 1】の態度ではないはずです。

$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ は対等なはずなのに，$\gamma$ を亡き者にして，$\alpha$，$\beta$ が独立になったら勝手に $\alpha$ を固定して $\beta$ を動かすなど，明らかに $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を対等に扱う態度ではありません。

様々ある最大最小問題へのアプローチのうち，最も対称性に準じた態度である

絶対不等式の活用

その中でもとりわけ「積」という形を活かした

相加平均・相乗平均の関係

から攻め落とします。

【解 3】

$0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，$0<\gamma<\pi$ なので，$\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$，$\sin\gamma>0$

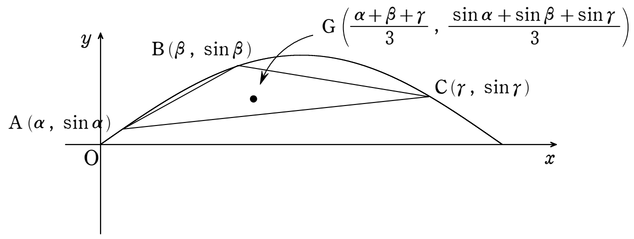
よって，相加平均・相乗平均の関係から

$$\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \leqq \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}$$

両辺正の値なので $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqq \left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3$ …①

（等号成立は $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ のとき）

ここで，$y=\sin x$ のグラフは $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で上に凸であることに注意する。




A$(\alpha, \sin\alpha)$，B$(\beta, \sin\beta)$，C$(\gamma, \sin\gamma)$ をとると，

△ABC の重心 G は G$\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)$ であり，

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ なので

$$\mathrm{G}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)$$

となり，G の $y$ 座標は $\sin\frac{\pi}{3}\left(=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 以下である。

すなわち，$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり，

$$\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3\leqq\frac{3\sqrt{3}}{8} \cdots ②$$

（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）

①，② より

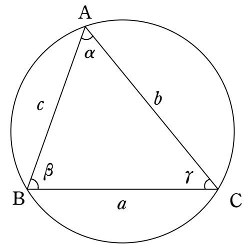
$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqq\frac{3\sqrt{3}}{8}$$（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ のとき）

以上から，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値は

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3} \text{ のとき}\right)$$ …答

**【戦略 4】**

**条件より，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ は三角形の内角を表しており，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を考えるにあたって，この三角形の大きさは関係なく，半径 $\frac{1}{2}$ の外接円半径をもつ三角形 ABC を考えることにします。（右下の図を参照）**




**すると，正弦定理より**

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=1$$

**なので，**

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma &= ab\sin\gamma\\ &=2\left(\frac{1}{2}ab\sin\gamma\right)\\ &=2(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})\end{aligned}$$

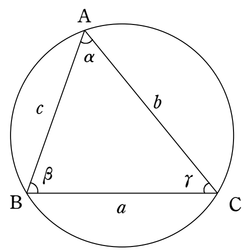
**よって，大きさが一定の円に内接する三角形の面積が最大になるのは正三角形であるときであることを認めれば，$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ のときに最大となります。**

【解 4】

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たす正の角 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ は三角形の内角として考えてよく，$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$ の三角形 ABC を考える。

$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ はこの三角形 ABC の大きさには依存しないので，

直径が 1（半径が $\frac{1}{2}$）の円に内接するサイズの三角形 ABC を考える。

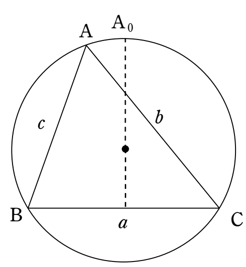



このとき，正弦定理より $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=1$

これより，

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma &= ab\sin\gamma\\ &=2\left(\frac{1}{2}ab\sin\gamma\right)\\ &=2(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})\cdots(*)\end{aligned}$$

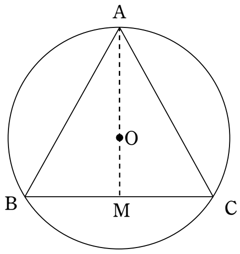
ゆえに，△ABC の面積が最大となるときを考える。




B，C を固定すると，△ABC の面積を大きくしようとしたとき，

A は上の図において $\mathrm{A}_0$ の位置にするのが最善である。

つまり




AB＝ACの二等辺三角形とするのが最善である。

このあと，辺BCの中点をMとし，OM$=x$ として，$0<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲で $x$ を動かし，△ABCの面積の最大値を求める。

このとき，直角三角形OBMに注目すると $\mathrm{BM}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-x^2}$

$\mathrm{BC}=2\,\mathrm{BM}=2\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}$ であり，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+x\right)\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\left(\frac{1}{4}-x^2\right)}\end{aligned}$$

$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}+x\right)^2\left(\dfrac{1}{4}-x^2\right)\ \left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{4}-x^2\right)+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\cdot(-2x)\\&=2\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)-2x\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\\&=2\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\left\{\left(\frac{1}{2}-x\right)-x\right\}\\&=-2(1+x)^2\left(2x-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{4}$ | $\cdots$ | $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\dfrac{27}{256}$ | ↘ | |

ゆえに，△ABCの最大値は $\sqrt{\dfrac{27}{256}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

$(*)$ より，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値は $2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{16}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ …答

【総括】

分野別学習で言えば「３変数関数の最大値問題」という捉え方ができますし，観点別学習で言えば「対称性に注目する」という問題と捉えることができます。

まずもって言いたいのは「セオリーは裏切らない」ということです。
決して【解1】の方針が悪いとは言いません。【解1】の方針はきちんと最大最小問題に対するアプローチを勉強してきた人からすれば，それはそれで自然な発想なのですから。

ただ，【解3】のように対称性に注目し，様々ある最大最小問題へのアプローチの中で一番対称性を活かす方針を決定するというのも自然な発想でしょう。

最後の【解4】は「視覚化」という観点別学習の項目に分類される方針です。

式の持つ図形的な意味を捉えていく力は，一つ上のステージへ行くために必要な力でしょう。

例えば，$ax+by$ という式を $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ というベクトルの内積と見る，などものの見方を訓練している人からすれば，【解4】のような見方も「自然な発想」になり得るのではないでしょうか。

「何をもって自然な発想か」という問題は人それぞれかもしれませんが，いずれにせよ自然な発想の素となる常識的な部分を疎かにしてはなりません。