Σ 計算基本方針【二項係数の２乗和】

n を正の整数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2$ を n を用いて表せ。

【戦略】

完全に経験がモノをいいますが，

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n\,(x+1)^n$$

と見てやります。

右辺は

$$({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_kx^k+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n)({}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$$

となり，これを展開したときの x^n の係数について考えます。

$$(\qquad +{}_n\mathrm{C}_kx^k\qquad)(\qquad +{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}\qquad)$$

と展開したときに ${}_n\mathrm{C}_k\,{}_n\mathrm{C}_kx^n$ という x^n の項が現れます。

つまり，x^n を含む項は

$${}_n\mathrm{C}_0\,{}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1\,{}_n\mathrm{C}_1x^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_k\,{}_n\mathrm{C}_kx^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2\right)x^n$$

ということになります。

一方で，

$$(1+x)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1x^1+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_nx^n+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}x^{2n}$$

なので，x^n の係数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ であることが分かります。

したがって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$ ということになり，解決です。

【解答】

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n\,(x+1)^n$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_kx^k+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n)({}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)$$

これを展開したときの x^n についての項は

$${}_n\mathrm{C}_0\,{}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1\,{}_n\mathrm{C}_1x^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_k\,{}_n\mathrm{C}_kx^n+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2\right)x^n$$

一方，二項定理より

$$(1+x)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1x^1+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_nx^n+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}x^{2n}$$

であり，$(1+x)^{2n}$ の x^n の係数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n\left(=\dfrac{(2n)!}{(n\,!)^2}\right)$

ゆえに，

$$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2=\frac{(2n)!}{(n\,!)^2}\ \cdots\ 答$$

【総括】

二項係数についての Σ 計算なので，基本は二項定理の活用という方針です。

ただし，

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n\,(x+1)^n$$

と見て，左辺と右辺の x^n の係数を見比べるという方針については経験がモノをいいます。

初見かつノーヒントでは厳しいでしょう。