【参考類題】

以下の問いに答えよ。

(1) $x=\cos\theta$ とおくとき，$p=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$，$q=\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ を x の整式として表せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ であることを示せ。

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

＜ ’06 長岡技術科学大学 ＞

【戦略】

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

という 2 倍角，3 倍角の公式を利用するのみです。

(2) $5\theta=\pi$ **ということになりますが，示すべき目標から** $2\theta+3\theta=\pi$

と見て，$2\theta=\pi-3\theta$ **として，両辺に** $\sin$ **の服を着せることにより**

$\sin 2\theta=\sin(\pi-3\theta)$，**すなわち** $\sin 2\theta=\sin 3\theta$ **を得ます。**

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ **のとき，**$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ **が成り立ちますが，**

$\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ **が成り立つことになり，**$\cos\theta=x$ **とおくと**

(1) **から** $2x=4x^2-1$，**すなわち** $4x^2-2x-1=0$ **を得て**

$\cos\theta\,(>0)$ **を考えると，**$\cos\theta\left(=\cos\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ **を得ます。**

ただ，この程度であれば，(1) の誘導はなくても何とかなる範疇でしょうから，今回の【解答】では (1) はなかったかのように記述することにします。

【解答】

(1)
$$p=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta=2x \quad\cdots\text{答}$$
$$q=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta=3-4(1-\cos^2\theta)=4\cos^2\theta-1=4x^2-1 \quad\cdots\text{答}$$

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$5\theta=\pi$ で，$2\theta+3\theta=\pi$

これより，$2\theta=\pi-3\theta$ であり，$\sin 2\theta=\sin(\pi-3\theta)$

つまり，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ を得る。

(3) (2) より，$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ であり

$$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$\sin\theta\left(=\sin\dfrac{\pi}{5}\right)\neq 0$ であるから，$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta=4\cos^2\theta-1$

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$ で，$\cos\theta\left(=\cos\dfrac{\pi}{5}\right)>0$ を考えると

$$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

以上から，$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ …答

【総括】

$x=\cos\theta$ とおいたとき，$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ は x の $n-1$ 次式で表せます。

今回の $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}=U_n(\cos\theta)$ を満たす多項式 $U_n(x)$ は

第 2 種チェビシェフの多項式

と呼ばれます。

本問は $U_2(x)=U_3(x)$ が誘導となっています。